Ana II, Woche 1 Übung

6. April 2022

https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-11545-6

Referenzen

- Forster, O. *Analysis 1* [bes. § 18]
- Deitmar, A. *Analysis* [bes. Kapitel 13]

Addendum

Hier das Hauptresultat

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
(od. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$)
f ist Riemann-intergrierbar
gdw.

1) f beschränkt; und
2) Es gibt eine „kleine Menge" *
$N \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ s. d.

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \setminus N : f \textbf{ stetig}^{*} \text{ in } x$$

* in der ÜG schrieb ich versehentlich „diffbar"

Es bedarf zwei Erklärungen:

1) Welche formale Definition von „klein" wird hier gebraucht?

2) „Riemann-intergrierbar" = Riemann-$\int$ existiert.
„Wie definiert man dieses $\int$ formal?

Zu **1)** kommt die Antwort später im Modul/Studium, sobald Maßtheorie thematisiert wird. Neugierige können hierfür **[** Deitmar, Kapitel 13 **]** nachschlagen.
Wir brauchen Werkzeuge, um Teilmengen von $\mathbb{R}$ eine „Masse" zuzuschreiben. Sobald man über solche Mitteln verfügt fixieren wir „klein" ≡ Teilmenge hat Masse (oder: Maß) 0. Wir nennen diese Teilmengen (Lebesgue-) **Nullmengen**.

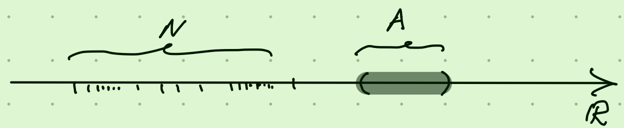


Fig 1: Bsp. einer Nullmenge (N) und einer Nichtnullmenge (A).

Die Klasse $Null(\mathbb{R}) := \{N \subseteq \mathbb{R} \mid N \text{ eine Nullmenge}\}$ genießt folgende Eigenschaften:

i. $\emptyset \in Null(\mathbb{R})$

ii. $\{x\} \in Null(\mathbb{R})$ für $x \in \mathbb{R}$

iii. wenn $N_1, N_2, \dots, N_n \in Null(\mathbb{R})$ dann $\bigcup_{k=1}^{n} N_k \in Null(\mathbb{R})$ — $Null(\mathbb{R})$ ist unter endl. Vereinigungen stabil

iv. wenn $N_1, N_2, \dots \in Null(\mathbb{R})$ dann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in Null(\mathbb{R})$ — $Null(\mathbb{R})$ ist unter σ-Vereinigungen stabil

v. aus **ii-iv** folgt $A \in Null(\mathbb{R})$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ bestehend aus endlich od. abzählbar unendlich vielen Elementen.
z. B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind Nullmengen.

vi. $(a,b) \notin Null(\mathbb{R})$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

vii. $\underbrace{\text{für } A \subseteq B \subseteq \mathbb{R},\ B \in Null(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in Null(\mathbb{R})}_{Null(\mathbb{R}) \text{ ist nach unten stabil}}$

Bemerkung Dieses Wissen ist noch keine Pflicht, soll aber nur unserer Intuition erweitern.

1

Zu **2)**: wir haben in der VL sowie der ÜG die Konzepte hinter dem Riemann-$\int$ diskutiert.

Bemerkung: in der ÜG war die Notation leicht abweichend (z.B. $O_f(Z)$ statt $O_Z(f)$) und wir berechneten Sup/Inf über offenen Intervallen ((x_k, x_{k+1}) statt $[x_k, x_{k+1}]$). Letzteres macht im Endeffekt keinen Unterschied. Dazu haben wir die „Stützstellen" nicht erörtert. $\longrightarrow$ siehe im Zweifelsfall VL-Skript. **[** Forster, $\int$18 **]** ist auch Prima.

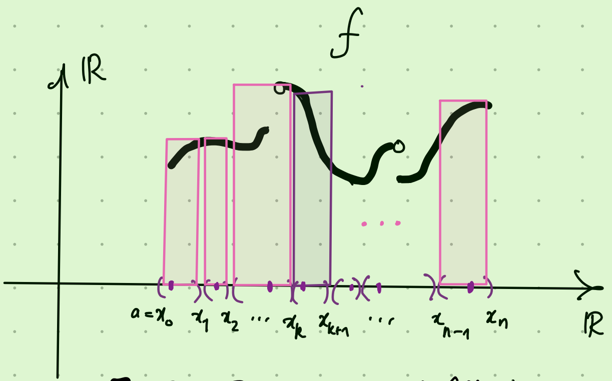


Fig 2: Bsp einer Fkt (f) und Zerlegung $Z=(x_0, x_1, \dots, x_n)$

Zusammenfassung des Riemann-$\int$

(siehe **Fig 2**)

- $a<b$ in $\mathbb{R}$
- $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (od: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$) eine (erstmals) völlig beliebige Fkt
- Zerlegungen

$$\mathcal{P} := \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}, \; a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b \}$$

$\hookrightarrow$ geordnet durch

$$Z_1 \precsim Z_2 :\Longleftrightarrow Z_2 \text{ „feiner als" } Z_1$$

$\hookrightarrow (\mathcal{P}, \precsim)$ refl. & trans. & „nach oben gerichtet"

- Für $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$ setze man:

obere Summe $\quad O_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$

untere Summe $\quad U_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$

Summe mit **Stützstellen**

$$(a=) x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n (=b)$$

setze

$$S_{Z,\xi}(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

Dann gelten (siehe VL-Skript)

$$(O_Z(f))_{Z\in\mathcal{P}} \quad \text{monoton } \searrow$$

$$(U_Z(f))_{Z\in\mathcal{P}} \quad \text{monoton } \nearrow$$

$$\forall Z, Z' \in \mathcal{P}: \quad U_Z(f) \leq O_Z(f)$$

Da $[-\infty, \infty]$ ordnungsvollständig ist, gelten also

$$U_Z(f) \xrightarrow[Z]{} \sup_Z U_Z(f) =: \int^+ f\,dx$$

$$O_Z(f) \xrightarrow[Z]{} \inf_Z U_Z(f) =: \int^- f\,dx$$

und

$$\int^- f\,dx \leq \int^+ f\,dx.$$

Dies führt zur folgenden natürlichen

Definition:

f heißt **Riemann-$\int$bar** gdw.

lim u. Summen = lim o. Summen

d.h. $\int^- f\,dx = \int^+ f\,dx$

In diesem Falle setze man

Riemann-$\int$ von f

$$:= \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_Z U_Z(f)$$

$$= \lim_Z O_Z(f)$$

$$\left(= \lim_{Z,\xi} S_{Z,\xi}(f)\right)$$

siehe [VL, Lemma 22]

Beispiel 1.

Sei $0<a<1$ in $\mathbb{R}$.
Betrachte die Funktion

$$f : [a,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$: x \longmapsto x^{-1/2}$$

Übung: zeige, anhand der Eigenschaften auf Seite 3, dass dies in der Tat ausreichend ist.

Es reicht aus, (wieso?) Zerlegungen $(Z_n)_n$ von $[a,1]$ zu finden, s.d.

$$\sup_n U_{Z_n}(f) = \inf_n O_{Z_n}(f),$$

um die Riemann-$\int$barkeit und den Wert von $\int f\,dx$ zu bestimmen.

Wir probieren es mit folgenden Zerlegungen:

$$Z_n := (\underset{x_0}{a}, \underset{x_1}{a\gamma_n}, \underset{x_2}{a\gamma_n^2}, \ldots, \underset{x_n}{a\gamma_n^n} = 1)$$

mit $\gamma_n := a^{-1/n}$

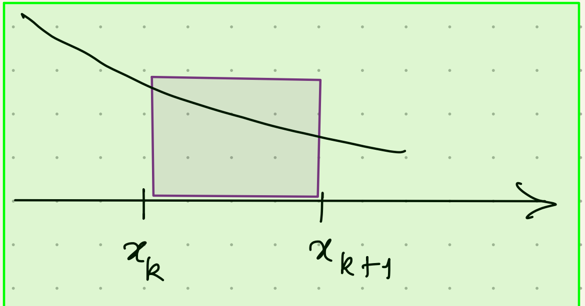


Fig 3: beliebige Stelle in Zerlegung

Da f monoton fallend ist, gelten

$$\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = x_{k+1}^{-1/2} = \gamma_n^{-1/2} x_k^{-1/2}$$

$$\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = x_k^{-1/2}$$

und $(x_{k+1} - x_k) = (\gamma_n - 1)x_k$

bitte wenden ...

... also

$$U_{Z_n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_n^{-1/2} x_k^{-1/2} \cdot (\gamma_n - 1) x_k$$
$$= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n-1) \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{1/2}$$
$$= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^{1/2}(\gamma_n^{1/2})^k$$
$$= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n-1)\, a^{1/2} \cdot \frac{(\gamma_n^{1/2})^n-1}{\gamma_n^{1/2}-1}$$

geom. Reihe

$$= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n^{1/2}+1)\, a^{1/2}(\gamma_n^{\frac{n}{2}}-1)$$
$$= (1+\gamma^{-1/2})\, a^{1/2} (\gamma_n^{\frac{n}{2}}-1)$$
$$= (1+(a^{-1/n})^{-1/2})\, a^{1/2}((a^{-\frac{1}{n}})^{\frac{n}{2}}-1)$$
$$= (1+a^{\frac{1}{2n}})(1-\sqrt{a})$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} (1+1)\cdot(1-\sqrt{a})$$

$$O_{Z_n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{-1/2}\cdot(\gamma_n-1)\,x_k$$
$$= \gamma_n^{-1/2}\, U_{Z_n}(f)$$
$$= \underbrace{a^{-\frac{1}{2n}}}_{\xrightarrow[n]{} 1}\ \underbrace{U_{Z_n}(f)}_{\longrightarrow 2\cdot(1-\sqrt{a})}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot 2\cdot(1-\sqrt{a})$$

Darum

$$U_{Z_n}(f) \xrightarrow[n]{} 2(1-\sqrt{a})$$
$$\|$$
$$O_{Z_n}(f) \xrightarrow[n]{} 2(1-\sqrt{a})$$

Darum ist f Riemann-$\int$bar mit

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_a^1 f\,dx = 2\cdot(1-\sqrt{a}).$$

Bemerkung:

1) dies entspricht unserer Erwartung
2) während $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ streng genommen durch das bisherige Verfahren nicht wohldefiniert ist (da die Obersummen explodieren), gilt

$$\lim_{a\to 0^+} \underbrace{\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{\text{existiert nach o.s. Berechnung}} = \lim_{a\to 0^+} 2\cdot(1-\sqrt{a}) = 2$$

D.h. es gibt einen Weg, um $\int_a^b f\,dx$ zu definieren, auch wenn f auf (a,b) unbeschr. ist.

Beispiel 2.

Sei

$$Q_2 := \left\{ \frac{2k-1}{2^n} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}_0 \right\} \subset \mathbb{Q} \quad \text{(strikt!)}$$

Betrachte

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$: x \longmapsto \begin{cases} 1-e^{-n} & : x = \frac{2k-1}{2^n},\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}_0, \\ 1 & : x \notin Q_2 \end{cases}$$

F1: existier das Riemann-$\int$

$$\int_0^1 g\, dx$$

?

Diesmal ist es schwer, das Verhalten von g **geometrisch** darzustellen. Wir wissen nichts über das Monotonieverhalten bspw. Aber wir können g aus Perspektive der **Information** untersuchen.

Zu diesem Zwecke sei $n\in\mathbb{N}$ beliebig. Wir können die Frage stellen:

F2: wie viele Pkt $x\in Q_2 \cap [0,1]$ gibt es, s.d. x der Form

$$x = \frac{2k+1}{2^j}, \quad k\in\mathbb{Z},\ j\in\{0,1,\dots,n\}$$

?

Wir stellen fest: $\frac{2k-1}{2^j} \in [0,1]$, $k\in\mathbb{Z}$

$$\iff 0 \le 2k-1 \le 2^j, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \frac{1}{2} \le k \le \frac{2^j+1}{2} = 2^{j-1}+\frac{1}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff 1 = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \le k \le \left\lfloor 2^{j-1}+\frac{1}{2} \right\rfloor = 2^{j-1}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff k\in\{1,2,\dots,2^{j-1}\}$$

für alle $j\in\mathbb{N}$ (und $k=1$ falls $j=0$).

D.h. es gibt endlich viele Stellen

$$A_n := \{1\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \left\{ \frac{2k-1}{2^j} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z},\ 1\le k\le 2^{j-1} \right\}$$

s.d. $\forall x\in[0,1]$:

$$\exists k\in\mathbb{Z},\ j\in\{0,1,\dots,n\} : x = \frac{2k+1}{2^j}$$

$$\iff x\in A_n$$

Darum gilt für alle $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$:

Fall 1: $x \in A_n$. Dann
$x = \frac{2k+1}{2^j}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{0,1,\dots,n\}$.
Also $g(x) = 1 - e^{-j} \in [0,1]$.

Fall 2: $x \in Q_2 \setminus A_n$. Dann
$x = \frac{2k+1}{2^j}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j > n$
Also
$$g(x) = 1 - \underbrace{e^{-j}}_{<1} > 1 - e^{-n} \quad \text{(Monotonie)}$$

Fall 3: $x \notin Q_2$. Dann $g(x) = 1$.

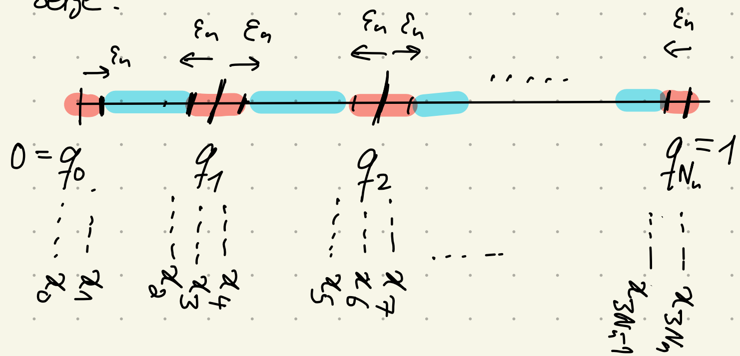
$1 - e^{-n} < g(x) \le 1$ für $x \in [0,1] \setminus A_n$

Jetzt sind wir bereit, eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[0,1]$ zu konstruieren, und wie in **Bsp 1** die Riemann-$\int$barkeit von g zu demonstrieren.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_{N_n} = 1$ eine geordnete Auflistung aller Elemente in der (endlichen!) Menge
$$A_n \cup \{0,1\}.$$

Sei
$$\varepsilon_n := \min\left\{ \frac{2^{-n}}{2N_n}, \min_{0 \le j < N_n} \frac{q_{j+1} - q_j}{3} \right\}$$

setze:



d.h. $x_{3k} = q_k$ für $k \in \{0,1,\dots,N_n\}$
$x_{3k-1} = q_k - \varepsilon_k$ für $k \in \{1,2,\dots,N_n\}$
$x_{3k+1} = q_k + \varepsilon_k$ für $k \in \{0,1,\dots,N_n - 1\}$

Setze
$$Z_n := (x_0, x_1, \dots, x_{3N_n}).$$

8

Die im Rot markierten Intervalle decken offensichtlich

$$\{q_0, q_1, \dots, q_{N_n}\} \ (= A_n \cup \{0,1\})$$

ab.

Die im Blau markierten Intervalle enthalten wegen Disjunktheit somit kein Pkt aus A_n.

Wegen der Einschätzungen auf Seite **7a** gelten für $k \in \{0, 1, \dots, 3N_n - 1\}$:

Fall 1 $[x_k, x_{k+1}]$ ein rotes Interall:

- $x_{k+1} - x_k = \varepsilon_n$
- $\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} g(x) \geq 0$

  $\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} g(x) \leq 1$

Fall 2 $[x_k, x_{k+1}]$ ein blaues Interall:

- $\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} g(x) \geq 1 - \varepsilon_n$

  $\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} g(x) \leq 1$

Unteresummen

$$U_{Z_n}(g) \geq \sum_{\substack{k=0 \\ [x_k, x_{k+1}] \text{ Rot}}}^{3N_n - 1} 0 \cdot \varepsilon_n + \sum_{\substack{k=0 \\ [x_k, x_{k+1}] \text{ Blau}}}^{3N_n - 1} (1 - \varepsilon_n) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$= (1 - \varepsilon_n) \underbrace{\sum_{k=0}^{3N_n - 1} (x_{k+1} - x_k)}_{\text{Teleskopsumme} \ = x_{3N_n} - x_0 = 1 - 0 = 1} - (1 - \varepsilon_n) \cdot \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ [x_k, x_{k+1}] \text{ Rot}}}^{3N_n - 1} \varepsilon_n}_{= \# \text{Rot} \cdot \varepsilon_n = 2N_n \cdot \varepsilon_n < 2N_n \cdot \frac{2^{-n}}{2N_n} = 2^{-n}}$$

$$> (1 - \varepsilon_n) \cdot 1 - (1 - \varepsilon_n) \cdot 2^{-n}$$

$$= (1 - \varepsilon_n) \cdot (1 - 2^{-n})$$

$$\xrightarrow[n]{} (1 - 0)(1 - 0)$$

Darum $\lim_{Z} U_Z(g) \geq \limsup_n U_{Z_n}(g)$

$$\geq \limsup_n (1 - \varepsilon_n)(1 - 2^{-n})$$

$$= \lim_n (1 - \varepsilon_n)(1 - 2^{-n})$$

$$= 1$$

*

Oberesummen

$$O_{Z_n}(g) \leq \sum_{k=0}^{3N_n-1} 1\cdot(x_{k+1}-x_k) \quad \text{Teleskopsumme} = x_{3N_n}-x_0 = 1-0 = 1$$

$$= 1$$

Darum $\lim_Z O_Z(g) \geq \liminf_n O_{Z_n}(g)$

$$\geq \liminf_n 1$$

$$= \lim_n 1$$

$$= 1$$

Also

$$1 \leq \lim_Z U_Z(g) \leq \lim_Z O_Z(g) \leq 1$$

Also

$$\lim_Z U_Z(g) = \lim_Z O_Z(g) = 1$$

Also ist g Riemann-$\int$bar mit

$$\int_0^1 g\,dx = 1.$$

Bemerkung

1) Wenn man die $\inf_{x\in(\dots)}\dots$ / $\sup_{x\in(\dots)}\dots$ Varianten für Untere-/Obersummen verwendet, statt $\inf_{x\in[\dots]}\dots$ / $\sup_{x\in[\dots]}\dots$, vermeidet man hier die Komplikation, die wir durch Aufteilung in „roten"/„blauen" Intervalle gehandhabt haben. Es würde dann nur „blaue" Intervalle geben (mit den „bösen" Elementen aus A_n als unerreichbare Endpunkte), und die Unteresummen wären bspw.

$$U_{Z_n}(g) = \sum_{k=0}^{N_n} \inf_{x\in(q_k,q_{k+1})} g(x)\cdot(q_{k+1}-q_k)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N_n} (1-e^{-n})\cdot(q_{k+1}-q_k)$$

$$= 1-e^{-n},$$

wobei $Z_n = (q_0, q_1, \dots, q_{N_n})$.

2) in **Bsp 2** kann man zeigen:

- g beschränkt auf $[0,1]$ $\left(\sup_{x \in [0,1]} |g(x)| = 1 < \infty \right)$
- $\{x \in [0,1] \mid g \text{ nicht stetig in } x\} = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_n}_{\text{endlich}}}_{\text{abzählbar}} \Longrightarrow$ Nullmenge (siehe Seite 1a)

Damit erfüllt g den Kriterien des Hauptresultats (siehe Seite 0a) und ist demnach Riemann-intergrierbar.

10

Zusätzliche Übung

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

(d.h. $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x) < \infty$).

Für eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ definiere:

$$O^\circ_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$\overline{O}_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$U^\circ_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in (x_k, x_{k+1})} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$\overline{U}_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

Zeige, dass

$$\lim_Z O^\circ_Z(f) = \lim_Z \overline{O}_Z(f)$$

$$\lim_Z U^\circ(f) = \lim_Z \overline{U}_Z(f)$$

Zeige damit, dass für die Definition von Riemann-$\int$barkeit die Konvention von abgeschl. od. offenen Intervallen keine Rolle spielt.