Ana II, Woche 1 Übung

6. April 2022

https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-11545-6

Referenzen

- Forster, O. Analysis 1 [bes. § 18]
- Deitmar, A. Analysis [bes. Kapitel 13]

Addendum

Hier das Hauptresultat

Seien $a<b$ in $\mathbb{R}$ und $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ (od. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$)

f ist Riemann-integrierbar gdw.

1) f beschränkt; und
2) Es gibt eine „kleine Menge" * $N\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ s.d.

$$\forall x\in \mathrm{Dom}(f)\setminus N:\ f \text{ **stetig**}^{*} \text{ in } x$$

* in der ÜG schrieb ich versehentlich „diffbar"

0

Es bedarf zwei Erklärungen:

1) Welche formale Definition von „klein" wird hier gebraucht?

2) „Riemann-integrierbar" = Riemann-$\int$ existiert. Wie definiert man dieses $\int$ formal?

Zu **1)** kommt die Antwort später im Modul/Studium, sobald Maßtheorie thematisiert wird. Neugierige können hierfür **[** Deitmar, Kapitel 13 **]** nachschlagen. Wir brauchen Werkzeuge, um Teilmengen von $\mathbb{R}$ eine „Masse" zuzuschreiben. Sobald man über solche Mitteln verfügt fixieren wir „klein" ≡ Teilmenge hat Masse (oder: Maß) 0. Wir nennen diese Teilmengen (Lebesgue-) **Nullmengen**.

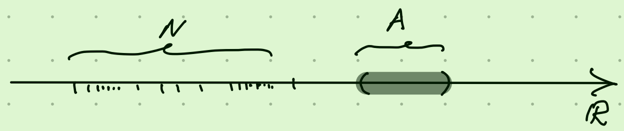

Fig 1: Bsp. einer Nullmenge (N) und einer Nichtnullmenge (A).

Die Klasse $Null(\mathbb{R}) := \{N \subseteq \mathbb{R} \mid N \text{ eine Nullmenge}\}$ genießt folgende Eigenschaften:

i. $\emptyset \in Null(\mathbb{R})$

ii. $\{x\} \in Null(\mathbb{R})$ für $x \in \mathbb{R}$

iii. wenn $N_1, N_2, \dots, N_n \in Null(\mathbb{R})$ dann $\bigcup_{k=1}^{n} N_k \in Null(\mathbb{R})$ } $Null(\mathbb{R})$ ist unter endl. Vereinigungen stabil

iv. wenn $N_1, N_2, \dots \in Null(\mathbb{R})$ dann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in Null(\mathbb{R})$ } $Null(\mathbb{R})$ ist unter σ– Vereinigungen stabil

v. aus ii–iv folgt $A \in Null(\mathbb{R})$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ bestehend aus endlich od. abzählbar unendlich vielen Elementen.
z. B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind Nullmengen.

vi. $(a,b) \notin Null(\mathbb{R})$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$.

vii. $\underbrace{\text{für } A \subseteq B \subseteq \mathbb{R},\ B \in Null(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in Null(\mathbb{R})}_{Null(\mathbb{R}) \text{ ist nach unten stabil}}$

Bemerkung Dieses Wissen ist noch keine Pflicht, soll aber nur unserer Intuition erweitern.

1

Zu **2)**: wir haben in der VL sowie der ÜG die Konzepte hinter dem Riemann-$\int$ diskutiert.

Bemerkung: in der ÜG war die Notation leicht abweichend (z.B. $O_f(Z)$ statt $O_Z(f)$) und wir berechneten Sup/Inf über offenen Intervallen ((x_k, x_{k+1}) statt $[x_k, x_{k+1}]$). Letzteres macht im Endeffekt keinen Unterschied. Dazu haben wir die „Stützstellen" nicht erörtert. $\longrightarrow$ siehe im Zweifelsfall VL-Skript. **[**Forster, §18**]** ist auch Prima.

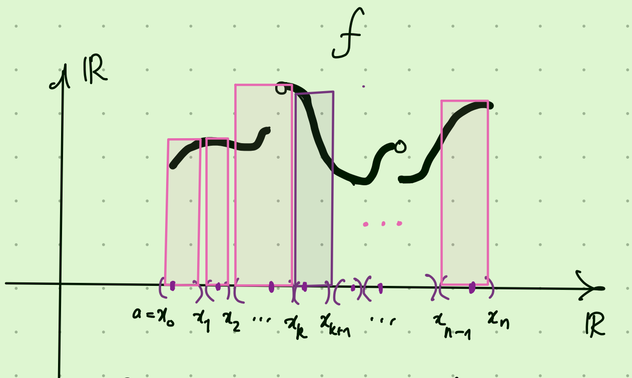

Fig 2: Bsp einer Fkt (f) und Zerlegung $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

Zusammenfassung des Riemann-$\int$

(siehe **Fig 2**)

- $a < b$ in $\mathbb{R}$
- $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (od: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$) eine (erstmals) völlig beliebige Fkt
- Zerlegungen

$$\mathcal{P} := \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \mid n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b \}$$

$\hookrightarrow$ geordnet durch

$$Z_1 \precsim Z_2 \ :\Longleftrightarrow\ Z_2 \text{ „feiner als" } Z_1 \text{"}$$

$\hookrightarrow$ $(\mathcal{P}, \precsim)$ refl. & trans. & „nach oben gerichtet"

- Für $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$ setze man:

obere Summe $$O_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

untere Summe $$U_Z(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in (x_k, x_{k+1})} f(x) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

Summe mit **Stützstellen**

$$(a =)\, x_0 \leq \xi_0 \leq x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n \,(= b)$$

setze

$$S_{Z,\xi}(f) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

Dann gelten (siehe VL-Skript)

$$(O_Z(f))_{Z\in\mathcal{P}} \quad \text{monoton} \searrow$$

$$(U_Z(f))_{Z\in\mathcal{P}} \quad \text{monoton} \nearrow$$

$$\forall Z, Z' \in \mathcal{P}: \quad U_Z(f) \leq O_{Z'}(f)$$

Da $[-\infty, \infty]$ ordnungsvollständig ist, gelten also

$$U_Z(f) \xrightarrow[Z]{} \sup_Z U_Z(f) =: \int^+ f\,dx$$

$$O_Z(f) \xrightarrow[Z]{} \inf_Z U_Z(f) =: \int^- f\,dx$$

und

$$\int^- f\,dx \leq \int^+ f\,dx.$$

Dies führt zur folgenden natürlichen

Definition:

f heißt **Riemann-$\int$bar** gdw.

lim u. Summen = lim o. Summen

d.h. $\quad \int^- f\,dx = \int^+ f\,dx$

In diesem Falle setze man

Riemann-$\int$ von f

$$:= \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_Z U_Z(f)$$

$$= \lim_Z O_Z(f)$$

$$\left(= \lim_{Z,\xi} S_{Z,\xi}(f)\right)$$

siehe [VL, Lemma 2a]

Beispiel 1.

Sei $0 < a < 1$ in $\mathbb{R}$

Betrachte die Funktion

$$f : [a, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$: x \longmapsto x^{-1/2}$$

(wieso?)

Es reicht aus, Zerlegungen $(Z_n)_n$ von $[a, 1]$ zu finden, s.d.

$$\sup_n U_{Z_n}(f) = \inf_n O_{Z_n}(f),$$

um die Riemann-$\int^{\text{bar}}$keit und den Wert von $\int f\,dx$ zu bestimmen.

Übung: zeige, anhand der Eigenschaften auf Seite 3a, das dies in der Tat ausreichend ist.

Wir probieren es mit folgenden Zerlegungen:

$$Z_n := (\underset{x_0}{a}, \underset{x_1}{a\gamma_n}, \underset{x_2}{a\gamma_n^2}, \ldots, \underset{x_n}{a\gamma_n^n} = 1)$$

mit $\gamma_n := a^{-1/n}$

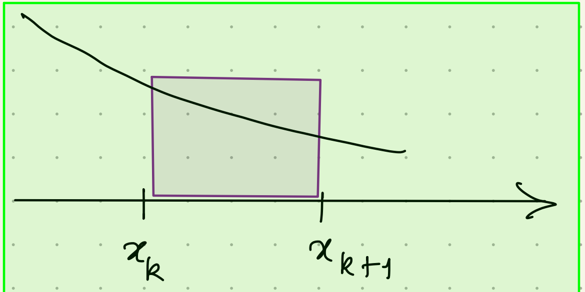

Fig 3: beliebige Stelle in Zerlegung

Da f monoton fallend ist, gelten

$$\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = x_{k+1}^{-1/2} = \gamma_n^{-1/2} x_k^{-1/2}$$

$$\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = x_k^{-1/2}$$

und $x_{k+1} - x_k = (\gamma_n - 1) x_k$

also

$$U_{Z_n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_n^{-1/2} x_k^{-1/2} \cdot (\gamma_n - 1) x_k$$

$$= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{1/2}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^{1/2} (\gamma_n^{1/2})^k \\ &= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n - 1)\, a^{1/2} \cdot \frac{(\gamma_n^{1/2})^n - 1}{\gamma_n^{1/2} - 1} \end{aligned}\right] \text{geom. Reihe}$$

$$= \gamma_n^{-1/2}(\gamma_n^{1/2} + 1)\, a^{1/2} (\gamma_n^{\frac{n}{2}} - 1)$$

$$= (1 + \gamma^{-1/2})\, a^{1/2} (\gamma_n^{\frac{n}{2}} - 1)$$

$$= (1 + (a^{-1/n})^{-1/2})\, a^{1/2} ((a^{-\frac{1}{n}})^{\frac{n}{2}} - 1)$$

$$= (1 + a^{\frac{1}{2n}})(1 - \sqrt{a})$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} (1+1) \cdot (1 - \sqrt{a})$$

$$O_{Z_n}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{-1/2} \cdot (\gamma_n - 1) x_k$$

$$= \gamma_n^{-1/2}\, U_{Z_n}(f)$$

$$= \underbrace{a^{-\frac{1}{2n}}}_{\xrightarrow[n]{} 1} \underbrace{U_{Z_n}(f)}_{\longrightarrow 2 \cdot (1 - \sqrt{a})}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot 2 \cdot (1 - \sqrt{a})$$

Daraus

$$U_{Z_n}(f) \xrightarrow[n]{} 2(1 - \sqrt{a})$$

$$\qquad\qquad\qquad \|$$

$$O_{Z_n}(f) \xrightarrow[n]{} 2(1 - \sqrt{a})$$

Darum ist f Riemann-$\int$bar mit

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \cdot (1 - \sqrt{a})$$

Bemerkung:

1) dies entspricht unserer Erwartung

2) während $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ streng genommen durch das bisherige Verfahren nicht wohldefiniert ist (da die Obersummen explodieren), gilt

$$\lim_{a\to 0^+} \underbrace{\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx}_{\text{existiert nach o.s. Berechnung}} = \lim_{a\to 0^+} 2 \cdot (1 - \sqrt{a}) = 2$$

D.h. es gibt einen Weg, um $\int f\, dx$ zu definieren, auch wenn f unbeschr. ist.

Beispiel 2.