Notizen

Raj Dahya

SoSe, 2022

Vorwort

In diesem Dokument sind Ergänzungsnotizen aus der mittwochs Übungsgruppe für Analysis II / Sommersemester 2022 an der Universität Leipzig.

Inhaltsverzeichnis

Woche 3.

20. April 2022

Aufgabe 3-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$;
- $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit g Riemann-integrierbar, $g \geqslant 0$ überall, und f stetig.

Also sind f, g beide Riemann-integrierbar (siehe VL).

3.1 Behauptung. *Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ so dass $\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$* ⊣

Beweis **(von Behauptung 3.1).** Da $[a, b]$ kompakt ist und f stetig ist, realisiert f sein Infimum und Supremum auf $[a, b]$. D. h. es existieren $x_-, x_+ \in [a, b]$, so dass

$$\begin{array}{rcccl} M_- & \coloneqq & \inf_{x \in [a,b]} f(x) & = & f(x_-) \in \mathbb{R}, \\ M_+ & \coloneqq & \sup_{x \in [a,b]} f(x) & = & f(x_+) \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Also $-\infty < M_- \leqslant f(x) \leqslant M_+ < \infty$ für alle $x \in [a, b]$. Per Monotonie des Integrals und da $g \geqslant 0$ und f sowie konstante Funktionen Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\underbrace{\int_a^b M_- g \,\mathrm{d}x}_{M_- \int_a^b g \,\mathrm{d}x =} \quad \leqslant \quad \int_a^b fg \,\mathrm{d}x \quad \leqslant \quad \underbrace{\int_a^b M_+ g \,\mathrm{d}x}_{= M_+ \int_a^b g \,\mathrm{d}x}. \tag{3.1}$$

Da $g \geqslant 0$ überall, gilt $\int_a^b g \,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Falls $\int_a^b g \,\mathrm{d}x > 0$, können wir in (3.1) überall durch diese Zahl teilen und erhalten $c \coloneqq \frac{\int_a^b fg \,\mathrm{d}x}{\int_a^b g \,\mathrm{d}x} \in [M_-, M_+]$. Falls $\int_a^b g \,\mathrm{d}x = 0$, dann folgt aus der o. s. Einschätzungen $0 \leqslant \int_a^b fg \,\mathrm{d}x \leqslant 0$ und damit $\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = 0$. In diesem Falle setzen wir ein beliebiges $c \in [M_-, M_+]$. In beiden Fällen sieht man

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x \quad = \quad c \cdot \int_a^b g \,\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

für ein $c \in [M_-, M_+]$. Da f stetig ist und die Werte M_-, M_+ realisiert, existiert laut des ZWS ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$. Eingesetzt in (3.2) erhalten wir die Behauptung. ■

Aufgabe 3-4.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$;
- $w : [a, b] \to [0, \infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

3.2 Behauptung. *$\sqrt{w}$ ist Riemann-integrierbar.* ⊣

Idee: Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a, b]$. Angesichts der Riemann-Integrierbarkeit von w, reicht es offenbar aus, ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$ zu finden. Als naïver Ansatz wollen nun die Ungleichung

$$|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| \leqslant \frac{|y_2 - y_1|}{\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\min\{y_1, y_2\}^{-1}}|y_2 - y_1| \tag{3.3}$$

für $y_1, y_2 \in (0, \infty)$ ausnutzen. Doch sofort erkennen wir das Problem: $\min\{y_1, y_2\}^{-1}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Hierfür gibt es einen kleinen Fix: wir verschieben die Funktionswerte um eine beliebig kleine positive Zahl, $\varepsilon > 0$, zeigen, dass $\sqrt{w + \varepsilon}$ Riemann-integrierbar ist, dann lassen wir $\varepsilon \longrightarrow 0$ tendieren und verwenden das Resultat: *Ein (durch gl. Konvergenz erreichbarer) Grenzwert Riemann-integrierbarer Funktionen ist wiederum Riemann-integrierbar.*

***Beweis* (von Behauptung 3.2).** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle Zerlegungen $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ von $[a, b]$ beobachte man unter den Definitionen $I_i \coloneqq [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i \coloneqq (x_{i+1} - x_i)$:

$$\begin{aligned}
O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sup_{x \in I_i} \sqrt{w(x) + \varepsilon} - \inf_{x \in I_i} \sqrt{w(x) + \varepsilon} \right) \cdot \delta x_i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sqrt{\sup_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon} - \sqrt{\inf_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon} \right) \cdot \delta x_i \\
&\quad \text{weil } \sqrt{(\cdot) + \varepsilon} \text{ stetig ist} \\
&\overset{(3.3)}{\leqslant} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left((\sup_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon) - (\inf_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon) \right) \cdot \delta x_i \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sup_{x \in I_i} w(x) - \inf_{x \in I_i} w(x) \right) \cdot \delta x_i \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} (O_Z(w) - U_Z(w)).
\end{aligned}$$

Kraft dieser Einschätzung erhält man aus der vorausgesetzten Riemann-Integrierbarkeit von w:

$$0 \leqslant \limsup_Z (O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon})) \leqslant \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \limsup_Z (O_Z(w) - U_Z(w)) = \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \cdot 0.$$

Also $\limsup_Z (O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon})) = 0$. Also $O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$. Darum stimmen untere und obere Summen von $\sqrt{w + \varepsilon}$ überein. Definitionsgemäß ist $\sqrt{w + \varepsilon}$ somit Riemann-integrierbar für alle $\varepsilon > 0$.

Beachte außerdem, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [a,b]} |\sqrt{w(x) + \varepsilon} - \sqrt{w(x)}| &= \sup_{x \in [a,b]} \frac{|(w(x) + \varepsilon) - w(x)|}{\sqrt{w(x) + \varepsilon} + \sqrt{w(x)}} \\
&= \sup_{x \in [a,b]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{w(x) + \varepsilon} + \sqrt{w(x)}} \\
&\leqslant \sup_{x \in [a,b]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{0 + \varepsilon} + \sqrt{0}} = \sqrt{\varepsilon},
\end{aligned}$$

sodass auf $[a, b]$ das Netz $(\sqrt{w + \varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{w}$ konvergiert für $\varepsilon \longrightarrow 0$.[1] Laut Vorlesung ist $\sqrt{w}$ somit Riemann-integrierbar. ■

[1] Wenn man mit Netzen nicht zurecht kommt, reicht es hier schon mit einer Folge aus: fixiere irgendeine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann $\sup_{x \in [a,b]} |\sqrt{w(x) + \varepsilon_n} - \sqrt{w(x)}| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Referenzen

[1] A. Deitmar. *Analysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2014.

[2] O. Forster. *Analysis 1*. Grundkurs Mathematik. Springer Spektrum, Wiesbaden, 12 edition, 2016.

[3] F. Pogorzelski. Analysis I–II, 2021–2. basierend auf dem Skript von Daniel Lenz 2013–14 + 2020–21.