



Notizen

Raj Dahya

SoSe, 2022

Vorwort

In diesem Dokument sind Ergänzungsnotizen aus der donnerstags Übungsgruppe für *Analysis II / Sommersemester 2022*, Universität Leipzig.

Inhaltsverzeichnis

2	Woche 3, 20. April 2022	4
2.1	4
2.4	4
3	Woche 4, 27. April 2022	9
3.1	9
3.2	10
3.3	11
3.4	14
	Referenzen	16

Kapitel 2.

Woche 3, 20. April 2022

Aufgabe 2-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in \mathbb{R} ;
- $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit g Riemann-integrierbar, $g \geq 0$ überall, und f stetig.

Also sind f, g beide Riemann-integrierbar (siehe VL).

2.1 Behauptung. *Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ so dass $\int_a^b fg \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx$* —

Beweis (von Behauptung 2.1). Da $[a, b]$ kompakt ist und f stetig ist, realisiert f sein Infimum und Supremum auf $[a, b]$. D. h. es existieren $x_-, x_+ \in [a, b]$, so dass

$$\begin{aligned} M_- &:= \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_-) \in \mathbb{R}, \\ M_+ &:= \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_+) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also $-\infty < M_- \leq f(x) \leq M_+ < \infty$ für alle $x \in [a, b]$. Per Monotonie des Integrals und da $g \geq 0$ und f sowie konstante Funktionen Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\underbrace{\int_a^b M_- g \, dx}_{M_- \int_a^b g \, dx} \leq \int_a^b fg \, dx \leq \underbrace{\int_a^b M_+ g \, dx}_{= M_+ \int_a^b g \, dx}. \quad (2.1)$$

Da $g \geq 0$ überall, gilt $\int_a^b g \, dx \geq 0$. Falls $\int_a^b g \, dx > 0$, können wir in (2.1) überall durch diese Zahl teilen und erhalten $c := \frac{\int_a^b fg \, dx}{\int_a^b g \, dx} \in [M_-, M_+]$. Falls $\int_a^b g \, dx = 0$, dann folgt aus der o. s. Einschätzungen $0 \leq \int_a^b fg \, dx \leq 0$ und damit $\int_a^b fg \, dx = 0$. In diesem Falle setzen wir ein beliebiges $c \in [M_-, M_+]$. In beiden Fällen sieht man

$$\int_a^b fg \, dx = c \cdot \int_a^b g \, dx \quad (2.2)$$

für ein $c \in [M_-, M_+]$. Da f stetig ist und die Werte M_-, M_+ realisiert, existiert laut des ZWS ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$. Eingesetzt in (2.2) erhalten wir die Behauptung. ■

Aufgabe 2-4.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in \mathbb{R} ;
- $w : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

2.2 Satz. *\sqrt{w} ist Riemann-integrierbar.* —

Idee: Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \xrightarrow{Z} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a, b]$. Angesichts der Riemann-Integrierbarkeit von w , reicht es offenbar aus, ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$ zu finden. Als naiver Ansatz wollen nun die Ungleichung

$$|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| \leq \frac{|y_2 - y_1|}{\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\min\{y_1, y_2\}^{-1}} |y_2 - y_1| \quad (2.3)$$

für $y_1, y_2 \in (0, \infty)$ ausnutzen. Doch sofort erkennen wir das Problem: $\min\{y_1, y_2\}^{-1}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Hierfür gibt es einen kleinen Fix: wir verschieben die Funktionswerte um eine beliebig kleine positive Zahl, $\varepsilon > 0$, zeigen, dass $\sqrt{w + \varepsilon}$ Riemann-integrierbar ist, dann lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0$ tendieren und verwenden das Resultat: *Ein (durch gl. Konvergenz erreichbarer) Grenzwert Riemann-integrierbarer Funktionen ist wiederum Riemann-integrierbar.*

Beweis (von Satz 2.2, Ansatz I). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle Zerlegungen $Z = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ von $[a, b]$ beobachte man unter den Definitionen $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i := (x_{i+1} - x_i)$:

$$\begin{aligned} O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sup_{x \in I_i} \sqrt{w(x) + \varepsilon} - \inf_{x \in I_i} \sqrt{w(x) + \varepsilon} \right) \cdot \delta x_i \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sqrt{\sup_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon} - \sqrt{\inf_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon} \right) \cdot \delta x_i \\ &\quad \text{weil } \sqrt{(\cdot) + \varepsilon} \text{ stetig ist} \\ (2.3) \quad &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left((\sup_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon) - (\inf_{x \in I_i} w(x) + \varepsilon) \right) \cdot \delta x_i \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sup_{x \in I_i} w(x) - \inf_{x \in I_i} w(x) \right) \cdot \delta x_i \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} (O_Z(w) - U_Z(w)). \end{aligned}$$

Kraft dieser Einschätzung erhält man aus der vorausgesetzten Riemann-Integrierbarkeit von w :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_Z (O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon})) \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \limsup_Z (O_Z(w) - U_Z(w)) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \cdot 0. \end{aligned}$$

Also $\limsup_Z (O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon})) = 0$. Also $O_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w + \varepsilon}) \xrightarrow{Z} 0$. Darum stimmen untere und obere Summen von $\sqrt{w + \varepsilon}$ überein. Definitionsgemäß ist $\sqrt{w + \varepsilon}$ somit Riemann-integrierbar für alle $\varepsilon > 0$.

Beachte außerdem, dass

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |\sqrt{w(x) + \varepsilon} - \sqrt{w(x)}| &= \sup_{x \in [a, b]} \frac{|(w(x) + \varepsilon) - w(x)|}{\sqrt{w(x) + \varepsilon} + \sqrt{w(x)}} \\ &= \sup_{x \in [a, b]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{w(x) + \varepsilon} + \sqrt{w(x)}} \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} \frac{\varepsilon}{\sqrt{0 + \varepsilon} + \sqrt{0}} = \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

sodass auf $[a, b]$ das Netz $(\sqrt{w + \varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ gleichmäßig gegen \sqrt{w} konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$.¹ Laut Vorlesung ist \sqrt{w} somit Riemann-integrierbar. ■

¹Wenn man mit Netzen nicht zurecht kommt, reicht es hier schon mit einer Folge aus: fixiere irgendeine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann $\sup_{x \in [a, b]} |\sqrt{w(x) + \varepsilon_n} - \sqrt{w(x)}| \leq \sqrt{\varepsilon_n} \xrightarrow{n} 0$.

Die Idee im vorherigen Ansatz kann man vereinfachen. Folgende Herangehensweise kommt von Tobias Habacker. Zunächst benötigen wir eine Einschätzung:

2.3 Proposition. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann für alle $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ gilt $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \leq \max\{\varepsilon^{-1}(\beta - \alpha), \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-1}(\beta - \alpha) + \varepsilon$. -1

Beweis. Falls $\sqrt{\beta} < \varepsilon$, so gilt $\max\{\varepsilon^{-1}(\beta - \alpha), \varepsilon\} \geq \varepsilon \geq \sqrt{\beta} \geq \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$, also gilt die Ungleichung. Falls $\sqrt{\beta} \geq \varepsilon$, so gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} &= \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} \\ &\leq \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\beta}} \\ &\leq \varepsilon^{-1}(\beta - \alpha) \\ &\leq \max\{\varepsilon^{-1}(\beta - \alpha), \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Darum gilt die erste Ungleichung in allen Fällen. Die zweite gilt, weil für alle $r, s \in [0, \infty)$ entweder $\max\{r, s\} = r \leq r + s$ oder $\max\{r, s\} = s \leq r + s$ gilt. ■

Dies können wir verwenden, um die Ober- und Untersummen von \sqrt{w} ohne Modifizierung von w einzuschätzen.

Beweis (von Proposition 2.3, Ansatz II). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle Zerlegungen $Z = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ von $[a, b]$ beobachte man unter den Definitionen $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i := (x_{i+1} - x_i)$:

$$\begin{aligned} O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sqrt{\sup_{x \in I_i} w(x)} - \sqrt{\inf_{x \in I_i} w(x)} \right) \cdot \delta x_i \\ &\text{(analog zu Ansatz I)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(\varepsilon^{-1} \cdot (\sup_{x \in I_i} w(x) - \inf_{x \in I_i} w(x)) + \varepsilon \right) \cdot \delta x_i \\ &\text{wegen Proposition 2.3} \\ &= \varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (x_N - x_0) \\ &= \varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Da dies für alle Zerlegungen, Z , von $[a, b]$ gilt und w Riemann-integrierbar ist, gilt $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z \rightarrow 0$. Folglich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_Z (O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w})) \\ &\leq \limsup_Z (\varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (b - a)) \\ &= \varepsilon^{-1} \cdot \limsup_Z (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (b - a) \\ &= \varepsilon^{-1} \cdot 0 + \varepsilon \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhält man

$$0 \leq \limsup_Z (O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w})) \leq \inf_{\varepsilon} (\varepsilon \cdot (b - a)) = 0.$$

Also $\limsup_Z (O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w})) = 0$. Also $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z \rightarrow 0$. Also ist \sqrt{w} Riemann-integrierbar. ■

Es gibt nun einen dritten Ansatz. Vorerst brauchen wir zwei kleine Resultate:

2.4 Proposition. Sei $u : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$. Angenommen, \sqrt{u} sei Riemann-integrierbar. Aus der VL wissen wir, dass dann $u = \sqrt{u}^2$ ebenfalls Riemann-integrierbar ist. Des Weiteren gilt $\int_a^b \sqrt{u} \, dx \leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b u \, dx \right)^{1/2}$. ←

Beweis. Dies ist eine einfache Anwendung von der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf die Riemann-integrierbaren Funktion \sqrt{u} und $\mathbf{1}_{[a,b]}$. (Siehe ÜG.) ■

2.5 Proposition. Seien $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$. Dann $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta - \alpha}$. ←

Beweis. Falls $\alpha = \beta$, sind beide seiten der behaupteten Ungleichung 0 und deshalb gilt sie. Ansonsten muss $\beta > \alpha \geq 0$ und damit $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} > 0$. Durch den üblichen Trick erhalten wir

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} = \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \frac{\sqrt{\beta - \alpha}}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} \leq \sqrt{\beta - \alpha} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta} + 0},$$

da $\sqrt{\cdot}$ monoton ist und $\beta - \alpha \leq \beta$ und $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\beta}$. Darum gilt die Ungleichung. ■

Jetzt können wir die Idee hinter dem 3. Ansatz zum Beweis von Satz 2.2 erklären:

Idee: Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \xrightarrow{Z} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a, b]$. Wiederum suchen wir ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$. Nun, entsprechend der Zerlegungen sind Treppenfunktionen. Darum betrachten wird diese Summen als Integrale von Treppenfunktionen und wenden die Ungleichung in Proposition 2.4 darauf an. Dies dürfen wir, da Treppenfunktionen stets Riemann-integrierbar sind.

Beweis (von Satz 2.2, Ansatz III). Sei $Z = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Setze außerdem $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i := (x_{i+1} - x_i)$. Setze auch

$$\begin{aligned} h_i^+ &:= \sup_{x \in I_i} w(x), & g_i^+ &:= \sup_{x \in I_i} \sqrt{w(x)}, \\ h_i^- &:= \sup_{x \in I_i} w(x), & g_i^- &:= \sup_{x \in I_i} \sqrt{w(x)} \end{aligned}$$

für jedes $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ und definiere die Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} h^+ &:= \sum_{i=0}^{N-1} h_i^+ \cdot \mathbf{1}_{I_i}, & g^+ &:= \sum_{i=0}^{N-1} g_i^+ \cdot \mathbf{1}_{I_i}, \\ h^- &:= \sum_{i=0}^{N-1} h_i^- \cdot \mathbf{1}_{I_i}, & g^- &:= \sum_{i=0}^{N-1} g_i^- \cdot \mathbf{1}_{I_i}. \end{aligned}$$

Per Konstruktion dieser Treppenfunktionen sieht man sofort, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b h^+ \, dx &= O_Z(w), & \int_a^b g^+ \, dx &= O_Z(\sqrt{w}), \\ \int_a^b h^- \, dx &= U_Z(w), & \int_a^b g^- \, dx &= U_Z(\sqrt{w}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

gelten. Wegen Stetigkeit und (striker) Monotonie von $\sqrt{\cdot}$ auf $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ beobachte man, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{h_i^+} &= \sqrt{\sup_{x \in I_i} w(x)} = \sup_{x \in I_i} \sqrt{w(x)} = g_i^+, \\ \sqrt{h_i^-} &= \sqrt{\sup_{x \in I_i} w(x)} = \sup_{x \in I_i} \sqrt{w(x)} = g_i^- \end{aligned}$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Darum gelten

$$\sqrt{h^+} = g^+ \quad \text{und} \quad \sqrt{h^-} = g^-. \tag{2.5}$$

Mithilfe der o. s. Resultate erhält man

$$\begin{aligned}
 O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) &\stackrel{(2.4)}{=} \int_a^b g^+ - g^- \, dx \\
 &\stackrel{(2.5)}{=} \int_a^b \sqrt{h^+} - \sqrt{h^-} \, dx \\
 &\leq \int_a^b \sqrt{h^+ - h^-} \, dx && (2.6) \\
 &\text{nach Proposition 2.5} \\
 &\text{und da } 0 \leq h^- \leq h^+ < \infty \text{ überall} \\
 &\leq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b h^+ - h^- \, dx \right)^{1/2} \\
 &\stackrel{(2.4)}{=} (b-a)^{1/2} \sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)}
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Proposition 2.4 folgt, und da $h^+ - h^-$ eine Treppenfunktion und damit Riemann-integrierbar ist.

Da w Riemann-integrierbar ist, gilt nun $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z \rightarrow 0$. Wegen Stetigkeit von $(b-a)^{1/2} \sqrt{\cdot}$ auf $[0, \infty)$ gilt also $((b-a)^{1/2} \sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)})_Z \rightarrow 0$. Da (2.6) für alle Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt, erhält man

$$0 \leq \limsup_Z O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \leq \limsup_Z (b-a)^{1/2} \sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)} = 0$$

Darum gilt $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z \rightarrow 0$. Also ist \sqrt{w} Riemann-integrierbar. ■

Kapitel 3.

Woche 4, 27. April 2022

Aufgabe 3-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in \mathbb{R} und wir setzen $X := [a, b]$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für jede Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiere $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| \in [0, \infty]$. Per Definition gilt $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ gdw. f beschränkt ist.

3.1 Behauptung. Angenommen, so dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genüge folgender Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \quad (\text{C})$$

Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $(f_n)_n \rightarrow f$ gleichmäßig. \dashv

Beweis. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Darum ist $(f_n(x))_n \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy. Da \mathbb{R} vollständig ist, existiert somit eine eindeutige Zahl $y_x \in \mathbb{R}$, so dass $(f_n(x))_n \rightarrow y_x$. Definiere nun $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = y_x$ für $x \in X$. Dann per Wahl wissen wir, dass $(f_n)_n \rightarrow f$ punktweise. Wir müssen zeigen, dass (1) diese Konvergenz gleichmäßig ist und dass (2) f stetig ist.

Zur gleichmäßigen Konvergenz:

Sei $\varepsilon > 0$. Per Eigenschaft (C) existiert ein Index N_0 , so dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $m, n \geq N_0$. Sei $m \geq N_0$ beliebig. Sei $x \in X$ beliebig. Per Konstruktion von f existiert ein Index n_0 , so dass $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$. Wähle nun irgendeinen Index n mit $n \geq N_0$ und $n \geq n_0$. Dann:

$$|f(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$

da $n \geq n_0$ und $m, n \geq N_0$. Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir

$$\|f - f_m\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Darum wurde

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N : \|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

bewiesen. Also, $(f_n)_n \rightarrow f$ gleichmäßig.

Zur Stetigkeit von f :

Seien $(x_k)_k \subseteq X$ und $x \in X$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(f(x_k))_k \rightarrow f(x)$. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen eine Umgebung U von x finden, so dass

$$\forall x' \in U : |f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad (3.1)$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz existiert ein Index N_0 , so dass

$$\|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.2}$$

für $m \geq N_0$. Wähle nun irgendeinen Index m mit $m \geq N_0$. Da per Voraussetzung f_m stetig ist, existiert eine Umgebung U von x , so dass

$$\forall x' \in U : |f_m(x') - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

Zwei Anwendungen von (3.2) und eine von (3.3) liefert nun für jedes $x' \in U$:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &\leq |f(x') - f_m(x')| + |f_m(x') - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - f_m\|_\infty + |f_m(x') - f_m(x)| + \|f_m - f\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Darum gilt (3.1). Da x, ε beliebig gewählt wurden ist f stetig. ■

3.2 Bemerkung. *Es spielte keine Rolle, dass es sich um eine Folge handelte: wir hätten auch mit Netzen arbeiten können. Wir benötigen nur die Vollständigkeit des Werteraums. Darum hätten wir \mathbb{R} durch jeden beliebigen vollständig metrischen Raum, (Y, d) , ersetzen können. Es spielt überhaupt keine Rolle, dass $X = [a, b]$. Dieser Beweis funktioniert für jeden topologischen Raum, X , solange alle stetigen Funktionen über X beschränkt sind. Dies ist der Fall, wenn X kompakt ist. In der Tat, wissen wir durch einen analogen Beweis mit effektiv keinen Modifizierungen, dass der Raum $C(X, Y)$ (der Raum aller stetigen Funktionen über einem kompakten Raum X nach einem vollständig metrischen Raum (Y, d)) vollständig ist bzgl. der Metrik $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Siehe bspw. [AB05, §3.19, bes. Lemma 3.97, S.124]. Wenn (Y, d) ein vollständig normierter Vektorraum ist (wie z. B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$), so ist d_∞ durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ induziert, und $(C(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ bildet dann einen vollständig normierten Vektorraum. Dies ist einer der ersten Banach-Räume, dem wir begegnen.* —

Aufgabe 3-2.

3.3 Behauptung. Seien $\alpha \in (0, \infty)$. Dann $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} < \infty$ gdw. $\alpha > 1$. —

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1$. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k^{-\alpha} &= k^{-N} + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t=k}^{k+1} k^{-\alpha} dt \\ &\geq 0 + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t=k}^{k+1} t^{-\alpha} dt = \int_{t=1}^N t^{-\alpha} dt \end{aligned} \tag{3.4}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k^{-\alpha} &= 1 + \sum_{k=2}^N \int_{t=k-1}^k k^{-\alpha} dt \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^N \int_{t=k-1}^k t^{-\alpha} dt \\ &= 1 + \int_{t=1}^N t^{-\alpha} dt. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Laut Skript (siehe [Pog 2, §11.3, Bsp. (c)]) wissen wir nun, dass

$$\int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} dt = \begin{cases} +\infty & : \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & : \alpha > 1 \end{cases}. \tag{3.6}$$

Folglich gelten

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N k^{-\alpha} \\
 &\stackrel{(3.5)}{\leq} \limsup_{N \rightarrow \infty} \int_{t=1}^N t^{-\alpha} dt + 1 \\
 &= \int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} dt + 1 \\
 &\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{1-\alpha} + 1 < \infty,
 \end{aligned}$$

falls $\alpha > 1$, und

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} &= \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N k^{-\alpha} \\
 &\stackrel{(3.4)}{\geq} \limsup_{N \rightarrow \infty} \int_{t=1}^N t^{-\alpha} dt \\
 &= \int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} dt \\
 &\stackrel{(3.6)}{=} +\infty,
 \end{aligned}$$

falls $0 < \alpha \leq 1$. Darum gilt die Behauptung. ■

Aufgabe 3-3.

Für diese Aufgaben brauchen wir zunächst einmal Lemma, um unsere Arbeit zu erleichtern.

3.4 Lemma. Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $h : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $h(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$. Sei außerdem $(T_n)_n \subseteq [a, \infty)$ eine monoton wachsende Folge mit $T_n \rightarrow \infty$ und so, dass $(T_{n+1} - T_n)_n$ beschränkt ist. Dann ist $\int_a^{\infty} h dt$ konvergent gdw. $(\int_a^{T_n} h dt)_n$ konvergent ist. \dashv

Beweis. Offensichtlich gilt die »nur dann wenn«-Richtung. Für die »wenn«-Richtung, sei angenommen, $(\int_a^{T_n} h dt)_n$ konvergiert mit Grenzwert $I \in \mathbb{R}$. Setze $C \in (0, \infty)$ mit $\sup_n T_{n+1} - T_n \leq C$.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei N ein genügend großer Index mit $|\int_a^{T_n} h dt - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Da f gegen $+\infty$ verschwindend ist, existiert ein $\tilde{T} \in [a, \infty)$, so dass $|f(\cdot)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ auf $[\tilde{T}, \infty)$. Sei nun $T \in [\max\{T_N, \tilde{T}\}, \infty)$ beliebig. Da $T \geq T_N$ und $(T_n)_n \rightarrow +\infty$ monoton, existiert ein $n \geq N$ so, dass $T \in [T_n, T_{n+1}]$. Da $n \geq N$ und $[T_n, T] \subseteq [\tilde{T}, \infty)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^T h(t) dt - I \right| &\leq \left| \int_a^T h(t) dt - \int_a^{T_n} h(t) dt \right| + \left| \int_a^{T_n} h(t) dt - I \right| \\
 &< \left| \int_{T_n}^T h(t) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &< \int_{T_n}^T \underbrace{|h(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2C}} dt + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq (T - T_n) \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq (T_{n+1} - T_n) \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq C \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Darum gilt für genügend großes $T \in [a, \infty)$ (in Abhängigkeit von ε), dass $|\int_a^T h(t) dt - I| < \varepsilon$.

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt ist $(\int_a^T h dt)_{T \in [a, \infty)}$ konvergent (mit Grenzwert I). Also konvergiert $\int_a^\infty h dt$. ■

3.5 Behauptung. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Dann konvergiert $\int_{x=1}^\infty f dx$. ◊

Beweis. Für $c \in (0, \infty)$ beobachte, dass

$$\begin{aligned}
 \left| \int_c^{c+2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| &= \left| \int_c^{c+2\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_c^{c+2\pi} \frac{\sin(x)}{c} dx \right| \\
 &\quad \text{da } \int_c^{c+2\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_c^{c+2\pi} = 0 \\
 &= \left| \int_c^{c+2\pi} \sin(x) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right) dx \right| \\
 &\leq \int_c^{c+2\pi} \underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right|}_{\leq \frac{1}{c} - \frac{1}{c+2\pi} = \frac{2\pi}{c(c+2\pi)}} dx \\
 &\leq 2\pi \cdot \frac{2\pi}{c(c+2\pi)} \leq \left(\frac{2\pi}{c} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da f offensichtlich gegen $+\infty$ verschwindend ist, laut Lemma 3.4 reicht es aus zu zeigen, dass $(\int_1^{2\pi n} f dx)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei hierfür $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty$, wissen wir, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass $|\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{k^2}| < \varepsilon$ für alle $n_1, n_2 \geq N$. Für $n_1, n_2 \geq N$ berechnen wir daher:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_1^{2\pi n_1} f dx - \int_1^{2\pi n_2} f dx \right| &= \left| \int_{2\pi \min\{n_1, n_2\}}^{2\pi \max\{n_1, n_2\}} f dx \right| \\
 &= \left| \sum_{k=\min\{n_1, n_2\}}^{\max\{n_1, n_2\}-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f dx \right| \\
 &= \sum_{k=\min\{n_1, n_2\}}^{\max\{n_1, n_2\}-1} \left| \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f dx \right| \\
 &\stackrel{(3.7)}{\leq} \sum_{k=\min\{n_1, n_2\}}^{\max\{n_1, n_2\}-1} \left(\frac{2\pi}{2\pi k} \right)^2 \\
 &= \left| \sum_1^{n_1} \frac{1}{k^2} - \sum_1^{n_2} \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Es folgt, dass $(\int_1^{2\pi n} f dx)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist und wegen Vollständigkeit von \mathbb{R} konvergent. Laut Lemma 3.4 existiert damit $\int_1^\infty f dx$. ■

3.6 Behauptung. $\int_{x=1}^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ divergiert gegen $+\infty$. ◊

Beweis. ■

3.7 Behauptung. Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Dann divergiert $\int_{x=1}^{\infty} g \, dx$ gegen $+\infty$. —

Um dies zu beweisen brauchen wir ein kleines Zwischenresultat.

3.8 Lemma. Für $k, c \in [0, \infty)$ mit $k \geq 1$ ist $I_{k,c} := \int_{x=1}^{\infty} \frac{\sin(kx - c)}{x} \, dx$ konvergent. —

(b)

Beweis. Schreibe $I_{k,c}(T) := \int_{x=1}^T \frac{\sin(kx - c)}{x} \, dx$ für $T \in [1, \infty)$. Wegen Aufgabe 3(a) wissen wir bereits, dass $I_{1,0}(T) \rightarrow I_{1,0} \in \mathbb{R}$ für $T \rightarrow +\infty$. Für $T \in [1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} I_{k,c}(T) &= \int_1^T \frac{\sin(kx - c)}{kx - c + c} \cdot u' \, du \\ &\quad \text{mit } u(x) := kx - c \\ &= \int_{k+c}^{kT+c} \frac{\sin(u)}{u + c} \, du \\ &= \int_1^{kT+c} \frac{\sin(u)}{u} \, du - \underbrace{\int_1^{kT+c} \sin(u) \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+c}\right) \, du}_{=: D_c(kT+c)} \\ &\quad - \underbrace{\int_1^{k+c} \frac{\sin(u)}{u+c} \, du}_{=: E_{k,c}} \\ &= I_{1,0}(kT+c) + D_c(kT+c) + E_{k,c}. \end{aligned}$$

Wegen Stetigkeit von $[1, k+c] \ni x \mapsto \frac{\sin(u)}{u+c}$, ist diese Funktion Riemann-integrierbar. Also ist $E_{k,c} \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Wie oben wissen wir, dass $T \rightarrow +\infty \Rightarrow kT+c \rightarrow +\infty \Rightarrow I_{1,0}(kT+c) \rightarrow I_{1,0} \in \mathbb{R}$. Darum, um die Konvergenz von $I_{k,c}$ zu zeigen, müssen wir lediglich die Konvergenz von $(D_c(kT+c))_{T \in [1, \infty)}$ zeigen.

Nebenrechnung: $|\sin(u) \cdot (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+c})| = |\sin(u)| \cdot \frac{c}{u(u+c)} \leq \frac{c}{u^2}$ für $u \in [1, \infty)$. Da $\int_{u=1}^{\infty} \frac{c}{u^2} \, du$ existiert, ist somit der Betrag der stetigen Funktion $[1, \infty) \ni u \mapsto \sin(u) \cdot (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+c})$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Folglich ist diese Funktion (ohne Betrag) uneigentlich Riemann-integrierbar. Insbesondere ist $(D_c(T))_{T \in [1, \infty)}$ und somit auch $(D_c(kT+c))_{T \in [1, \infty)}$ konvergent.

Darum konvergiert $(I_{k,c}(T))_{T \in [1, \infty)}$. D. h. $\int_{x=1}^{\infty} \frac{\sin(kx - c)}{x} \, dx$ existiert. ■

Jetzt können wir mit dem Beweis von Behauptung 3.7 fortsetzen.

Beweis (von Behauptung 3.7). Sei $T \in [1, \infty)$. Schreibe $J(T) := \int_{x=1}^T g \, dx$. Für $x \in [1, \infty)$ gilt $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{\cos(2x)}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{\sin(2x-\frac{\pi}{2})}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + h_{2, \frac{\pi}{2}}(x))$. Darum gilt

$$\begin{aligned} J(T) &= \frac{1}{2} \int_{x=1}^T \frac{1}{x} \, dx + \frac{1}{2} \int_{x=1}^T h_{2, \frac{\pi}{2}}(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \log(T) - \frac{1}{2} I_{2, \frac{\pi}{2}}(T). \end{aligned}$$

Da $(I_{2, \frac{\pi}{2}}(T))_{T \in [1, \infty)} \rightarrow I_{2, \frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$ (siehe Lemma 3.8) und $(\log(T))_{T \in [1, \infty)} \rightarrow +\infty$, folgt

$$(J(T))_{T \in [1, \infty)} \longrightarrow +\infty. \text{ D. h. } \int_{x=1}^{\infty} g \, dx = +\infty. \quad \blacksquare$$

Aufgabe 3-4.

(b) Zu berechnen:

$$I := \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x)) \, dx$$

Idee: Der Trick hier (oder: einer davon!) ist ein gewöhnlicher: Wir können zwar keine Stammfunktion (zumindest auf einfache Weise) bestimmen, aber als ganzen Wert betrachtet versuchen wir, einen algebraischen Ausdruck für I zu finden. Hierfür manipulieren wir die Domäne und nutzen Symmetrien im Funktionsausdruck aus.

Vorarbeit:

Für solche Tricks hilft es häufig, natürliche auxiliäre Ausdrücke (gleichzeitig) zu untersuchen. In diesem Falle ist dies:

$$J := \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(x)) \, dx.$$

Was die Symmetrien anbelangt, berufen wir uns auf folgende Erkenntnisse:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Berechnung:

Durch die Verhältnisse zw. \cos und \sin können wir I und J wie folgt in Verbindung setzen:

$$\begin{aligned} J &= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^0 \log(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) \, dx \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (-t') \cdot \log(\sin(t)) \, dx \\ \text{Subst: } t(x) &= \frac{\pi}{2} - x; \Rightarrow t' = -1 \\ &= - \int_{t=\frac{\pi}{2}}^0 \log(\sin(t)) \, dt = I. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wegen der Spiegelsymmetrie von \sin um $\frac{\pi}{2}$ kann man das Integral wie folgt verdoppeln:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^0 \log(\sin(x)) \, dx + \int_{x=\frac{\pi}{2}}^0 \log(\sin(\pi - x)) \, dx \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x)) \, dx + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (-t') \cdot \log(\sin(t)) \, dx \\ \text{Subst: } t(x) &= \pi - x; \Rightarrow t' = -1 \\ &= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^0 \log(\sin(x)) \, dx - \int_{t=\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(t)) \, dt \\ &= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^0 \log(\sin(x)) \, dx \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (2t') \cdot \log(\sin(2t)) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Subst: } t(x) &= \frac{1}{2}x; \Rightarrow t' = \frac{1}{2} \\ &= 2 \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t)) dt, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$I = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t)) dt. \quad (3.9)$$

Jetzt bringen wir diese zwei Umformungen zusammen:

$$\begin{aligned} 2I &\stackrel{(3.8)}{=} I + J \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x)) dx + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(x)) dx \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x) \cos(x)) dx \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) dx \\ &\quad \text{wegen trig. Identität} \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(\sin(2x)) \right) dx \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \frac{\pi}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + I. \end{aligned}$$

Darum erhält man folgenden algebraischen Ausdruck für I :

$$2I = \frac{\pi}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + I$$

Daraus ergibt sich, dass $I = \frac{\pi}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{2} \log(2)}$ der gesuchte Werte des Integrals ist.

3.9 Bemerkung. *Dieser Berechnung zufolge ist der Mittelwert von $\log(\sin(\cdot))$ auf dem Gebiet $[0, \frac{\pi}{2}]$ gleich $\log(\frac{1}{2})$, also $\log(\sin(\frac{\pi}{6}))$. Wegen der Symmetrien von \sin können wir daraus erschließen, dass der Mittelwert von $\log|\sin(\cdot)|$ auf $[0, 2\pi]$ auch gleich $\log(\frac{1}{2})$ ist.* ↯

Referenzen

- [AB05] Charalambos D. Aliprantis and Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis, a Hitchhiker's Guide*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2005.
- [Dei14] Anton Deitmar. *Analysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2014.
- [For16] Otto Forster. *Analysis 1*. Grundkurs Mathematik. Springer Spektrum, Wiesbaden, 12 edition, 2016.
- [Pog 2] Felix Pogorzelski. Vorlesungsskript: Analysis I–II, 2021–2. basierend auf dem Skript von Daniel Lenz 2013–14 + 2020–21.