Notizen

Raj Dahya

SoSe, 2022

Vorwort

In diesem Dokument sind Ergänzungsnotizen aus der donnerstags Übungsgruppe für *Analysis II / Sommersemester 2022*, Universität Leipzig.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2.

Woche 3, 20. April 2022

Aufgabe 2-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$;
- $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit g Riemann-integrierbar, $g \geqslant 0$ überall, und f stetig.

Also sind f, g beide Riemann-integrierbar (siehe VL).

2.1 Behauptung. *Es existiert ein $\xi \in [a,b]$ so dass $\int_a^b fg \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \, \mathrm{d}x$* ⊣

Beweis **(von Behauptung 2.1).** Da $[a,b]$ kompakt ist und f stetig ist, realisiert f sein Infimum und Supremum auf $[a,b]$. D. h. es existieren $x_-, x_+ \in [a,b]$, so dass

$$\begin{array}{rcccl} M_- & := & \inf_{x\in[a,b]} f(x) & = & f(x_-) \in \mathbb{R}, \\ M_+ & := & \sup_{x\in[a,b]} f(x) & = & f(x_+) \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Also $-\infty < M_- \leqslant f(x) \leqslant M_+ < \infty$ für alle $x \in [a,b]$. Per Monotonie des Integrals und da $g \geqslant 0$ und f sowie konstante Funktionen Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\underbrace{\int_a^b M_- g \, \mathrm{d}x}_{M_- \int_a^b g \, \mathrm{d}x =} \quad \leqslant \quad \int_a^b fg \, \mathrm{d}x \quad \leqslant \quad \underbrace{\int_a^b M_+ g \, \mathrm{d}x}_{= M_+ \int_a^b g \, \mathrm{d}x} . \tag{2.1}$$

Da $g \geqslant 0$ überall, gilt $\int_a^b g \, \mathrm{d}x \geqslant 0$. Falls $\int_a^b g \, \mathrm{d}x > 0$, können wir in (2.1) überall durch diese Zahl teilen und erhalten $c := \frac{\int_a^b fg \, \mathrm{d}x}{\int_a^b g \, \mathrm{d}x} \in [M_-, M_+]$. Falls $\int_a^b g \, \mathrm{d}x = 0$, dann folgt aus der o. s. Einschätzungen $0 \leqslant \int_a^b fg \, \mathrm{d}x \leqslant 0$ und damit $\int_a^b fg \, \mathrm{d}x = 0$. In diesem Falle setzen wir ein beliebiges $c \in [M_-, M_+]$. In beiden Fällen sieht man

$$\int_a^b fg \, \mathrm{d}x \quad = \quad c \cdot \int_a^b g \, \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

für ein $c \in [M_-, M_+]$. Da f stetig ist und die Werte M_-, M_+ realisiert, existiert laut des ZWS ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$. Eingesetzt in (2.2) erhalten wir die Behauptung. ∎

Aufgabe 2-4.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$;
- $w : [a,b] \to [0, \infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

2.2 Satz. *$\sqrt{w}$ ist Riemann-integrierbar.* ⊣

Idee: Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a,b]$. Angesichts der Riemann-Integrierbarkeit von w, reicht es offenbar aus, ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$ zu finden. Als naïver Ansatz wollen nun die Ungleichung

$$|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| \leqslant \tfrac{|y_2-y_1|}{\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1}} \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{\min\{y_1,y_2\}^{-1}}|y_2-y_1| \tag{2.3}$$

für $y_1, y_2 \in (0,\infty)$ ausnutzen. Doch sofort erkennen wir das Problem: $\min\{y_1,y_2\}^{-1}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Hierfür gibt es einen kleinen Fix: wir verschieben die Funktionswerte um eine beliebig kleine positive Zahl, $\varepsilon > 0$, zeigen, dass $\sqrt{w+\varepsilon}$ Riemann-integrierbar ist, dann lassen wir $\varepsilon \longrightarrow 0$ tendieren und verwenden das Resultat: *Ein (durch gl. Konvergenz erreichbarer) Grenzwert Riemann-integrierbarer Funktionen ist wiederum Riemann-integrierbar.*

Beweis **(von Satz 2.2, Ansatz I).** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle Zerlegungen $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ von $[a,b]$ beobachte man unter den Definitionen $I_i \coloneqq [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i \coloneqq (x_{i+1} - x_i)$:

$$\begin{aligned}
O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) &= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sup_{x\in I_i}\sqrt{w(x)+\varepsilon} - \inf_{x\in I_i}\sqrt{w(x)+\varepsilon}\right)\cdot\delta x_i\\
&= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sqrt{\sup_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon} - \sqrt{\inf_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon}\right)\cdot\delta x_i\\
&\quad \text{weil } \sqrt{(\cdot)+\varepsilon} \text{ stetig ist}\\
&\overset{(2.3)}{\leqslant} \sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left((\sup_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon) - (\inf_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon)\right)\cdot\delta x_i\\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sup_{x\in I_i} w(x) - \inf_{x\in I_i} w(x)\right)\cdot\delta x_i\\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(O_Z(w) - U_Z(w)).
\end{aligned}$$

Kraft dieser Einschätzung erhält man aus der vorausgesetzten Riemann-Integrierbarkeit von w:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \limsup_Z(O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon}))\\
&\leqslant \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\limsup_Z(O_Z(w) - U_Z(w)) = \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot 0.
\end{aligned}$$

Also $\limsup_Z(O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon})) = 0$. Also $O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$. Darum stimmen untere und obere Summen von $\sqrt{w+\varepsilon}$ überein. Definitionsgemäß ist $\sqrt{w+\varepsilon}$ somit Riemann-integrierbar für alle $\varepsilon > 0$.

Beachte außerdem, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]}|\sqrt{w(x)+\varepsilon} - \sqrt{w(x)}| &= \sup_{x\in[a,b]}\tfrac{|(w(x)+\varepsilon)-w(x)|}{\sqrt{w(x)+\varepsilon}+\sqrt{w(x)}}\\
&= \sup_{x\in[a,b]}\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{w(x)+\varepsilon}+\sqrt{w(x)}}\\
&\leqslant \sup_{x\in[a,b]}\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{0+\varepsilon}+\sqrt{0}} = \sqrt{\varepsilon},
\end{aligned}$$

sodass auf $[a,b]$ das Netz $(\sqrt{w+\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{w}$ konvergiert für $\varepsilon \longrightarrow 0$.[1] Laut Vorlesung ist $\sqrt{w}$ somit Riemann-integrierbar. ∎

[1] Wenn man mit Netzen nicht zurecht kommt, reicht es hier schon mit einer Folge aus: fixiere irgendeine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann $\sup_{x\in[a,b]}|\sqrt{w(x)+\varepsilon_n} - \sqrt{w(x)}| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Die Idee im vorherigen Ansatz kann man vereinfachen. Folgende Herangehensweise kommt von Tobias Habacker. Zunächst benötigen wir eine Einschätzung:

2.3 Proposition. *Sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig. Dann für alle* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty$ *gilt* $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \leqslant \max\{\varepsilon^{-1}(\beta - \alpha), \varepsilon\} \leqslant \varepsilon^{-1}(\beta - \alpha) + \varepsilon$. ⊣

Beweis. Falls $\sqrt{\beta} < \varepsilon$, so gilt $\max\{\varepsilon^{-1}(\beta - \alpha), \varepsilon\} \geqslant \varepsilon \geqslant \sqrt{\beta} \geqslant \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$, also gilt die Ungleichung. Falls $\sqrt{\beta} \geqslant \varepsilon$, so gilt

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} & = & \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}} \\ & \leqslant & \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\beta}} \\ & \leqslant & \varepsilon^{-1})(\beta - \alpha) \\ & \leqslant & \max\{\varepsilon^{-1}(\beta - \alpha), \varepsilon\}. \end{array}$$

Darum gilt die erste Ungleichung in allen Fällen. Die zweite gilt, weil für alle $r, s \in [0, \infty)$ entweder $\max\{r, s\} = r \leqslant r + s$ oder $\max\{r, s\} = s \leqslant r + s$ gilt. ■

Dies können wir verwenden, um die Ober- und Untersummen von $\sqrt{w}$ ohne Modifizierung von w einzuschätzen.

***Beweis* (von Proposition 2.3, Ansatz II).** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle Zerlegungen $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ von $[a, b]$ beobachte man unter den Definitionen $I_i \coloneqq [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i \coloneqq (x_{i+1} - x_i)$:

$$\begin{array}{rcl} O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) & = & \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sqrt{\sup_{x \in I_i} w(x)} - \sqrt{\inf_{x \in I_i} w(x)} \right) \cdot \delta x_i \\ & & \text{(analog zu Ansatz I)} \\ & \leqslant & \sum_{i=0}^{N-1} \left(\varepsilon^{-1} \cdot (\sup_{x \in I_i} w(x) - \inf_{x \in I_i} w(x)) + \varepsilon \right) \cdot \delta x_i \\ & & \text{wegen Proposition 2.3} \\ & = & \varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \\ & = & \varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (x_N - x_0) \\ & = & \varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (b - a). \end{array}$$

Da dies für alle Zerlegungen, Z, von $[a, b]$ gilt und w Riemann-integrierbar ist, gilt $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z \longrightarrow 0$. Folglich

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant & \limsup_Z (O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w})) \\ & \leqslant & \limsup_Z (\varepsilon^{-1} \cdot (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (b - a)) \\ & = & \varepsilon^{-1} \cdot \limsup_Z (O_Z(w) - U_Z(w)) + \varepsilon \cdot (b - a) \\ & = & \varepsilon^{-1} \cdot 0 + \varepsilon \cdot (b - a). \end{array}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhält man

$$0 \quad \leqslant \quad \limsup_Z (O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w})) \quad \leqslant \quad \inf_\varepsilon (\varepsilon \cdot (b - a)) \quad = \quad 0.$$

Also $\limsup_Z (O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w})) = 0$. Also $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z \longrightarrow 0$. Also ist $\sqrt{w}$ Riemann-integrierbar. ■

Es gibt nun einen dritten Ansatz. Vorerst brauchen wir zwei kleine Resultate:

2.4 Proposition. *Sei* $u : [a, b] \to [0, \infty)$. *Angenommen,* $\sqrt{u}$ *sei Riemann-integrierbar. Aus der VL wissen wir, dass dann* $u = \sqrt{u}^2$ *ebenfalls Riemann-integrierbar ist. Des Weiteren gilt* $\int_a^b \sqrt{u}\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^{1/2}(\int_a^b u\,\mathrm{d}x)^{1/2}$. ⊣

Beweis. Dies ist eine einfache Anwendung von der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf die Riemann-integrierbaren Funktion $\sqrt{u}$ und $\mathbf{1}_{[a,b]}$. (Siehe ÜG.) ∎

2.5 Proposition. *Seien* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty$. *Dann* $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \leqslant \sqrt{\beta - \alpha}$. ⊣

Beweis. Falls $\alpha = \beta$, sind beide seiten der behaupteten Ungleichung 0 und deshalb gilt sie. Ansonsten muss $\beta > \alpha \geqslant 0$ und damit $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} > 0$. Durch den üblichen Trick erhalten wir

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \quad = \quad \tfrac{\beta-\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}} \quad = \quad \sqrt{\beta-\alpha} \cdot \tfrac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}} \quad \leqslant \quad \sqrt{\beta-\alpha} \cdot \tfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+0},$$

da $\sqrt{\cdot}$ monoton ist und $\beta - \alpha \leqslant \beta$ und $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \geqslant \sqrt{\beta}$. Darum gilt die Ungleichung. ∎

Jetzt können wir die Idee hinter dem 3. Ansatz zum Beweis von Satz 2.2 erklären:

Idee: Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a, b]$. Wiederum suchen wir ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$. Nun, entsprechend der Zerlegungen sind Treppenfunktionen. Darum betrachten wird diese Summen als Integrale von Treppenfunktionen und wenden die Ungleichung in Proposition 2.4 darauf an. Dies dürfen wir, da Treppenfunktionen stets Riemann-integrierbar sind.

***Beweis* (von Satz 2.2, Ansatz III).** Sei $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Setze außerdem $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i := (x_{i+1} - x_i)$. Setze auch

$$\begin{array}{rclcrcl} h_i^+ & := & \sup_{x\in I_i} w(x), & \quad & g_i^+ & := & \sup_{x\in I_i} \sqrt{w(x)}, \\ h_i^- & := & \sup_{x\in I_i} w(x), & \quad & g_i^- & := & \sup_{x\in I_i} \sqrt{w(x)} \end{array}$$

für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ und definiere die Treppenfunktionen

$$\begin{array}{rclcrcl} h^+ & := & \sum_{i=0}^{N-1} h_i^+ \cdot \mathbf{1}_{I_i}, & \quad & g^+ & := & \sum_{i=0}^{N-1} g_i^+ \cdot \mathbf{1}_{I_i}, \\ h^- & := & \sum_{i=0}^{N-1} h_i^- \cdot \mathbf{1}_{I_i}, & \quad & g^- & := & \sum_{i=0}^{N-1} g_i^- \cdot \mathbf{1}_{I_i}\,. \end{array}$$

Per Konstruktion dieser Treppenfunktionen sieht man sofort, dass

$$\begin{array}{rclcrcl} \int_a^b h^+\,\mathrm{d}x & = & O_Z(w), & \quad & \int_a^b g^+\,\mathrm{d}x & = & O_Z(\sqrt{w}), \\ \int_a^b h^-\,\mathrm{d}x & = & U_Z(w), & \quad & \int_a^b g^-\,\mathrm{d}x & = & U_Z(\sqrt{w}) \end{array} \tag{2.4}$$

gelten. Wegen Stetigkeit und (strikter) Monotonie von $\sqrt{\cdot}$ auf $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ beobachte man, dass

$$\begin{array}{rclclcl} \sqrt{h_i^+} & = & \sqrt{\sup_{x\in I_i} w(x)} & = & \sup_{x\in I_i} \sqrt{w(x)} & = & g_i^+, \\ \sqrt{h_i^-} & = & \sqrt{\sup_{x\in I_i} w(x)} & = & \sup_{x\in I_i} \sqrt{w(x)} & = & g_i^- \end{array}$$

für alle $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Darum gelten

$$\sqrt{h^+} \quad = \quad g^+ \quad \text{und} \quad \sqrt{h^-} \quad = \quad g^-. \tag{2.5}$$

Mithilfe der o. s. Resultate erhält man

$$
\begin{aligned}
O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) &\overset{(2.4)}{=} \int_a^b g^+ - g^- \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2.5)}{=} \int_a^b \sqrt{h^+} - \sqrt{h^-} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \sqrt{h^+ - h^-} \,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{nach Proposition 2.5} \\
&\quad \text{und da } 0 \leqslant h^- \leqslant h^+ < \infty \text{ überall} \\
&\leqslant (b-a)^{1/2} (\int_a^b h^+ - h^- \,\mathrm{d}x)^{1/2} \\
&\overset{(2.4)}{=} (b-a)^{1/2} \sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)}
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

wobei die letzte Ungleichung aus Proposition 2.4 folgt, und da $h^+ - h^-$ eine Treppenfunktion und damit Riemann-integrierbar ist.

Da w Riemann-integrierbar ist, gilt nun $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z \longrightarrow 0$. Wegen Stetigkeit von $(b-a)^{1/2}\sqrt{\cdot}$ auf $[0, \infty)$ gilt also $((b-a)^{1/2}\sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)})_Z \longrightarrow 0$. Da (2.6) für alle Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt, erhält man

$$0 \leqslant \limsup_Z O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \leqslant \limsup_Z (b-a)^{1/2}\sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)} = 0$$

Darum gilt $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z \longrightarrow 0$. Also ist $\sqrt{w}$ Riemann-integrierbar. ■

Kapitel 3.

Woche 4, 27. April 2022

Aufgabe 3-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$ und wir setzen $X := [a, b]$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : X \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ definiere $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}|f(x)| \in [0, \infty]$. Per Definition gilt $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ gdw. f beschränkt ist.

3.1 Behauptung. *Angenommen, so dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge folgender Eigenschaft*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \tag{C}$$

Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so dass $(f_n)_n \longrightarrow f$ gleichmäßig. $\dashv$

Beweis. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Darum ist $(f_n(x))_n \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert somit eine eindeutige Zahl $y_x \in \mathbb{R}$, so dass $(f_n(x))_n \longrightarrow y_x$. Definiere nun $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = y_x$ für $x \in X$. Dann per Wahl wissen wir, dass $(f_n)_n \longrightarrow f$ punktweise. Wir müssen zeigen, dass (1) diese Konvergenz gleichmäßig ist und dass (2) f stetig ist.

Zur gleichmäßigen Konvergenz:

Sei $\varepsilon > 0$. Per Eigenschaft (C) existiert ein Index N_0, so dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $m, n \geqslant N_0$. Sei $m \geqslant N(\varepsilon)$ beliebig. Sei $x \in X$ beliebig. Per Konstruktion von f existiert ein Index n_0, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geqslant n_0$. Wähle nun irgendeinen Index n mit $n \geqslant N_0$ und $n \geqslant n_0$. Dann:

$$|f(x) - f_m(x)| \quad\leqslant\quad |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x)| \quad<\quad \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3},$$

da $n \geqslant n_0$ und $m, n \geqslant N_0$. Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir

$$\|f - f_m\|_\infty \quad=\quad \sup_{x\in X}|f(x) - f_m(x)| \quad\leqslant\quad \tfrac{2\varepsilon}{3} \quad<\quad \varepsilon.$$

Darum wurde

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N : \|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

bewiesen. Also, $(f_n)_n \longrightarrow f$ gleichmäßig.

Zur Stetigkeit von f:

Seien $(x_k)_k \subseteq X$ und $x \in X$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(f(x_k))_k \longrightarrow f(x)$. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen eine Umgebung U von x finden, so dass

$$\forall x' \in U : |f(x') - f(x)| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz existiert ein Index N_0, so dass

$$\|f - f_m\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{3.2}$$

für $m \geqslant N_0$. Wähle nun irgendeinen Index m mit $m \geqslant N_0$. Da per Voraussetzung f_m stetig ist, existiert eine Umgebung U von x, so dass

$$\forall x' \in U : |f_m(x') - f_m(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

Zwei Anwendungen von (3.2) und eine von (3.3) liefert nun für jedes $x' \in U$:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &\leqslant |f(x') - f_m(x')| + |f_m(x') - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leqslant \|f - f_m\|_\infty + |f_m(x') - f_m(x)| + \|f_m - f\|_\infty \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Darum gilt (3.1). Da x, ε beliebig gewählt wurden ist f stetig. ■

3.2 Bemerkung. *Es spielte keine Rolle, dass es sich um eine Folge handelte: wir hätten auch mit Netzen arbeiten können. Wir benötigten nur die Vollständigkeit des Werteraums. Darum hätten wir $\mathbb{R}$ durch jeden beliebigen vollständig metrischen Raum, (Y, d), ersetzen können. Es spielt überhaupt keine Rolle, dass $X = [a, b]$. Dieser Beweis funktioniert für jeden topologischen Raum, X, solange alle stetigen Funktionen über X beschränkt sind. Dies ist der Fall, wenn X kompakt ist. In der Tat, wissen wir durch einen analogen Beweis mit effektiv keinen Modifizierungen, dass der Raum $C(X, Y)$ (der Raum aller stetigen Funkionen über einem kompakten Raum X nach einem vollständig metrischen Raum (Y, d)) vollständig ist bzgl. der Metrik $d_\infty(f, g) \coloneqq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Siehe bspw. [AB05, §3.19, bes. Lemma 3.97, S.124]. Wenn (Y, d) ein vollständig normierter Vektorraum ist (wie z. B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$), so ist d_∞ durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ induziert, und $(C(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ bildet dann einen vollständig normierten Vektorraum. Dies ist einer der ersten Banach-Räume, dem wir begegnen.* ⊣

Aufgabe 3-2.

3.3 Behauptung. *Seien $\alpha \in (0, \infty)$. Dann $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} < \infty$ gdw. $\alpha > 1$.* ⊣

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1$. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha} &= k^{-N} + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t=k}^{k+1} k^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant 0 + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t=k}^{k+1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{N} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.4}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha} &= 1 + \sum_{k=2}^{N} \int_{t=k-1}^{k} k^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{N} \int_{t=k-1}^{k} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_{t=1}^{N} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Laut Skript (siehe [Pog 2, §11.3, Bsp. (c)]) wissen wir nun, dass

$$\int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty & : \alpha \leqslant 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & : \alpha > 1 \end{cases}. \tag{3.6}$$

Folglich gelten

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} &= \limsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha}\\ &\overset{(3.5)}{\leqslant} \limsup_{N\to\infty} \int_{t=1}^{N} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t + 1\\ &= \int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t + 1\\ &\overset{(3.6)}{=} \tfrac{1}{1-\alpha} + 1 < \infty,\end{aligned}$$

falls $\alpha > 1$, und

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} &= \limsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} k^{-\alpha}\\ &\overset{(3.4)}{\geqslant} \limsup_{N\to\infty} \int_{t=1}^{N} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{(3.6)}{=} +\infty,\end{aligned}$$

falls $0 < \alpha \leqslant 1$. Darum gilt die Behauptung. ■

Aufgabe 3-3.

Für diese Aufgaben brauchen wir zunächst einmal Lemma, um unsere Arbeit zu erleichtern.

3.4 Lemma. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $h : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $h(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow +\infty$. Sei außerdem $(T_n)_n \subseteq [a,\infty)$ eine monoton wachsende Folge mit $T_n \longrightarrow \infty$ und so, dass $(T_{n+1}-T_n)_n$ beschränkt ist. Dann ist $\displaystyle\int_a^{\infty} h\,\mathrm{d}t$ konvergent gdw. $(\displaystyle\int_a^{T_n} h\,\mathrm{d}t)_n$ konvergent ist.* ⊣

Beweis. Offensichtlich gilt die »nur dann wenn«-Richtung. Für die »wenn«-Richtung, sei angenommen, $(\displaystyle\int_a^{T_n} h\,\mathrm{d}t)_n$ konvergiert mit Grenzwert $I \in \mathbb{R}$. Setze $C \in (0,\infty)$ mit $\sup_n T_{n+1} - T_n \leqslant C$.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei N ein genügend großer Index mit $|\int_a^{T_n} h\,\mathrm{d}t - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant N$. Da f gegen $+\infty$ verschwindend ist, existiert ein $\tilde{T} \in [a,\infty)$, so dass $|f(\cdot)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}$ auf $[\tilde{T},\infty]$. Sei nun $T \in [\max\{T_N, \tilde{T}\},\infty)$ beliebig. Da $T \geqslant T_N$ und $(T_n)_n \longrightarrow +\infty$ monoton, existiert ein $n \geqslant N$ so, dass $T \in [T_n, T_{n+1}]$. Da $n \geqslant N$ und $[T_n, T] \subseteq [\tilde{T},\infty)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{T} h(t)\,\mathrm{d}t - I\right| &\leqslant \left|\int_a^{T} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{T_n} h(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^{T_n} h(t)\,\mathrm{d}t - I\right|\\ &< \left|\int_{T_n}^{T} h(t)\,\mathrm{d}t\right| + \tfrac{\varepsilon}{2}\\ &< \int_{T_n}^{T} \underbrace{|h(t)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2C}}\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant (T - T_n)\tfrac{\varepsilon}{2C} + \tfrac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant (T_{n+1} - T_n)\tfrac{\varepsilon}{2C} + \tfrac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant C\tfrac{\varepsilon}{2C} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Darum gilt für genügend großes $T \in [a,\infty)$ (in Abhängigkeit von ε), dass $|\displaystyle\int_a^{T} h(t)\,\mathrm{d}t - I| < \varepsilon$.

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt ist $(\int_a^T h \, \mathrm{d}t)_{T\in[a,\infty)}$ konvergent (mit Grenzwert I). Also konvergiert $\int_a^\infty h \, \mathrm{d}t$. ■

3.5 Behauptung. *Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Dann konvergiert $\int_{x=1}^\infty f \, \mathrm{d}x$.* ⊣

Beweis. Für $c \in (0,\infty)$ beobachte, dass

$$\begin{aligned}
\left|\int_c^{c+2\pi} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_c^{c+2\pi} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x - \int_c^{c+2\pi} \frac{\sin(x)}{c} \, \mathrm{d}x\right| \\
&\quad \text{da } \textstyle\int_c^{c+2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_c^{c+2\pi} = 0 \\
&= \left|\int_c^{c+2\pi} \sin(x) \cdot (\frac{1}{x} - \frac{1}{c}) \, \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_c^{c+2\pi} \underbrace{|\sin(x)|}_{\leqslant 1} \underbrace{|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}|}_{\substack{\leqslant \frac{1}{c} - \frac{1}{c+2\pi} \\ = \frac{2\pi}{c(c+2\pi)}}} \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\pi \cdot \tfrac{2\pi}{c(c+2\pi)} \leqslant (\tfrac{2\pi}{c})^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Da f offensichtlich gegen $+\infty$ verschwindend ist, laut Lemma 3.4 reicht es aus zu zeigen, dass $(\int_1^{2\pi n} f \, \mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei hiefür $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty$, wissen wir, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so dass $|\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{k^2}| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n_1, n_2 \geqslant N$. O. E. wähle $N > \frac{3}{\varepsilon}$. Für $n_1, n_2 \geqslant N$ berechnen wir daher:

$$\begin{aligned}
\left|\int_1^{2\pi n_1} f \, \mathrm{d}x - \int_1^{2\pi n_2} f \, \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{2\pi \min\{n_1,n_2\}}^{2\pi \max\{n_1,n_2\}} f \, \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{k=\min\{n_1,n_2\}}^{\max\{n_1,n_2\}-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f \, \mathrm{d}x\right| \\
&= \sum_{k=\min\{n_1,n_2\}}^{\max\{n_1,n_2\}-1} \left|\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f \, \mathrm{d}x\right| \\
&\overset{(3.7)}{\leqslant} \sum_{k=\min\{n_1,n_2\}}^{\max\{n_1,n_2\}-1} (\frac{2\pi}{2\pi k})^2 \\
&= \left|\sum_1^{n_1} \frac{1}{k^2} - \sum_1^{n_2} \frac{1}{k^2}\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $(\int_1^{2\pi n} f \, \mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist und wegen Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergent. Laut Lemma 3.4 existiert damit $\int_1^\infty f \, \mathrm{d}x$. ■

3.6 Behauptung. $\int_{x=1}^\infty |\frac{\sin(x)}{x}| \, \mathrm{d}x$ *divergiert gegen* $+\infty$. ⊣

Beweis. ■

3.7 Behauptung. *Sei $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Dann divergiert $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} g \,\mathrm{d}x$ gegen $+\infty$.* $\dashv$

Um dies zu beweisen brauchen wir ein kleines Zwischenresultat.

3.8 Lemma. *Für $k, c \in [0, \infty)$ mit $k \geqslant 1$ ist $I_{k,c} \coloneqq \displaystyle\int_{x=1}^{\infty} \frac{\sin(kx-c)}{x} \,\mathrm{d}x$ konvergent.* $\dashv$

(b)

Beweis. Schreibe $I_{k,c}(T) \coloneqq \displaystyle\int_{x=1}^{T} \frac{\sin(kx-c)}{x} \,\mathrm{d}x$ für $T \in [1, \infty)$. Wegen Aufgabe 3(a) wissen wir bereits, dass $I_{1,0}(T) \longrightarrow I_{1,0} \in \mathbb{R}$ für $T \longrightarrow +\infty$. Für $T \in [1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
I_{k,c}(T) &= \int_{1}^{T} \frac{\sin(kx-c)}{kx-c+c} \cdot u' \,\mathrm{d}u \\
&\ \text{mit } u(x) \coloneqq kx - c \\
&= \int_{k+c}^{kT+c} \frac{\sin(u)}{u+c} \,\mathrm{d}u \\
&= \int_{1}^{kT+c} \frac{\sin(u)}{u} \,\mathrm{d}u - \underbrace{\int_{1}^{kT+c} \sin(u) \cdot (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+c}) \,\mathrm{d}u}_{=:D_c(kT+c)} \\
&\ - \underbrace{\int_{1}^{k+c} \frac{\sin(u)}{u+c} \,\mathrm{d}u}_{=:E_{k,c}} \\
&= I_{1,0}(kT+c) + D_c(kT+c) + E_{k,c}.
\end{aligned}$$

Wegen Stetigkeit von $[1, k+c] \ni x \mapsto \frac{\sin(u)}{u+c}$, ist diese Funktion Riemann-integrierbar. Also ist $E_{k,c} \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Wie oben wissen wir, dass $T \longrightarrow +\infty \Rightarrow kT + c \longrightarrow +\infty \Rightarrow I_{1,0}(kT+c) \longrightarrow I_{1,0} \in \mathbb{R}$. Darum, um die Konvergenz von $I_{k,c}$ zu zeigen, müssen wir lediglich die Konvergenz von $(D_c(kT+c))_{T\in[1,\infty)}$ zeigen.

Nebenrechnung: $|\sin(u) \cdot (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+c})| = |\sin(u)| \cdot \frac{c}{u(u+c)} \leqslant \frac{c}{u^2}$ für $u \in [1, \infty)$. Da $\int_{u=1}^{\infty} \frac{c}{u^2} \,\mathrm{d}u$ existiert, ist somit der Bertrag der stetigen Funktion $[1, \infty) \ni u \mapsto \sin(u) \cdot (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+c})$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Folglich ist diese Funktion (ohne Betrag) uneigentlich Riemann-integrierbar. Insbesondere ist $(D_c(T))_{T\in[1,\infty)}$ und somit auch $(D_c(kT+c))_{T\in[1,\infty)}$ konvergent.

Darum konvergiert $(I_{k,c}(T))_{T\in[1,\infty)}$. D. h. $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} \frac{\sin(kx-c)}{x} \,\mathrm{d}x$ existiert. ■

Jetzt können wir mit dem Beweis von Behauptung 3.7 fortsetzen.

Beweis **(von Behauptung 3.7).** Sei $T \in [1, \infty)$. Schreibe $J(T) \coloneqq \int_{x=1}^{T} g \,\mathrm{d}x$. Für $x \in [1, \infty)$ gilt $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{\cos(2x)}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{\sin(2x-\frac{\pi}{2})}{x}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + h_{2,\frac{\pi}{2}}(x))$. Darum gilt

$$\begin{aligned}
J(T) &= \tfrac{1}{2} \int_{x=1}^{T} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{x=1}^{T} h_{2,\frac{\pi}{2}}(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2} \log(T) - \tfrac{1}{2} I_{2,\frac{\pi}{2}}(T).
\end{aligned}$$

Da $(I_{2,\frac{\pi}{2}}(T))_{T\in[1,\infty)} \longrightarrow I_{2,\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$ (siehe Lemma 3.8) und $(\log(T))_{T\in[1,\infty)} \longrightarrow +\infty$, folgt

$(J(T))_{T\in[1,\infty)} \longrightarrow +\infty$. D. h. $\displaystyle\int_{x=1}^{\infty} g\,\mathrm{d}x = +\infty$. ■

Aufgabe 3-4.

(b) Zu berechnen:

$$I := \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

Idee: Der Trick hier (oder: einer davon!) ist ein gewöhnlicher: Wir können zwar keine Stammfunktion (zumindest auf einfache Weise) bestimmen, aber als ganzen Wert betrachtet versuchen wir, einen algebraischen Ausdruck für I zu finden. Hierfür manipulieren wir die Domäne und nutzen Symmetrien im Funktionsausdruck aus.

Vorarbeit:

Für solche Tricks hilft es häufig, natürliche auxiliäre Ausdrücke (gleichzeitig) zu untersuchen. In diesem Falle ist dies:

$$J := \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

Was die Symmetrien anbelangt, berufen wir uns auf folgende Erkenntnisse:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Berechnung:

Durch die Verhältnisse zw. $\cos$ und $\sin$ können wir I und J wie folgt in Verbindung setzen:

$$\begin{aligned} J &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(\frac{\pi}{2} - x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (-t') \cdot \log(\sin(t))\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{Subst: } t(x) = \tfrac{\pi}{2} - x;\ \Rightarrow t' = -1 \\ &= -\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0} \log(\sin(t))\,\mathrm{d}t = I. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wegen der Spiegelsymmetrie von $\sin$ um $\frac{\pi}{2}$ kann man das Integral wie folgt verdoppeln:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (-t') \cdot \log(\sin(t))\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{Subst: } t(x) = \pi - x;\ \Rightarrow t' = -1 \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x - \int_{t=\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x=0}^{\pi} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\pi} (2t') \cdot \log(\sin(2t))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Subst: } t(x) = \tfrac{1}{2}x; \Rightarrow t' = \tfrac{1}{2} \\
= \quad & 2\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t))\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

und damit gilt

$$
I = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t))\,\mathrm{d}t. \tag{3.9}
$$

Jetzt bringen wir diese zwei Umformungen zusammen:

$$
\begin{aligned}
2I &\overset{(3.8)}{=} I + J \\
&= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\frac{1}{2}\sin(2x))\,\mathrm{d}x \\
& \text{wegen trig. Identität} \\
&= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\log(\frac{1}{2}) + \log(\sin(2x))\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{(3.9)}{=} \tfrac{\pi}{2} \cdot \log(\tfrac{1}{2}) + I.
\end{aligned}
$$

Darum erhält man folgenden algebraischen Ausdruck für I:

$$
2I = \tfrac{\pi}{2} \cdot \log(\tfrac{1}{2}) + I
$$

Daraus ergibt sich, dass $I = \frac{\pi}{2} \cdot \log(\frac{1}{2}) = \boxed{-\frac{\pi}{2}\log(2)}$ der gesuchte Werte des Integrals ist.

3.9 Bemerkung. *Dieser Berechnung zufolge ist der Mittelwert von* $\log(\sin(\cdot))$ *auf dem Gebiet* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *gleich* $\log(\frac{1}{2})$, *also* $\log(\sin(\frac{\pi}{6}))$. *Wegen der Symmetrien von* $\sin$ *können wir daraus erschließen, dass der Mittelwert von* $\log|\sin(\cdot)|$ *auf* $[0, 2\pi]$ *auch gleich* $\log(\frac{1}{2})$ *ist.* ⊣

Referenzen

[AB05] Charalambos D. Aliprantis and Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis, a Hitchhiker's Guide*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2005.

[Dei14] Anton Deitmar. *Analysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2014.

[For16] Otto Forster. *Analysis 1*. Grundkurs Mathematik. Springer Spektrum, Wiesbaden, 12 edition, 2016.

[Pog 2] Felix Pogorzelski. Vorlesungsskript: Analysis I–II, 2021–2. basierend auf dem Skript von Daniel Lenz 2013–14 + 2020–21.