Notizen

Raj Dahya

SoSe, 2022

Vorwort

In diesem Dokument sind Ergänzungsnotizen aus der donnerstags Übungsgruppe für *Analysis II / Sommersemester 2022*, Universität Leipzig.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2.

Woche 3, 20. April 2022

Aufgabe 2-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$;
- $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit g Riemann-integrierbar, $g \geqslant 0$ überall, und f stetig.

Also sind f, g beide Riemann-integrierbar (siehe VL).

2.1 Behauptung. *Es existiert ein $\xi \in [a, b]$ so dass $\int_a^b fg \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \, \mathrm{d}x$* ⊣

Beweis **(von Behauptung 3.1).** Da $[a, b]$ kompakt ist und f stetig ist, realisiert f sein Infimum und Supremum auf $[a, b]$. D. h. es existieren $x_-, x_+ \in [a, b]$, so dass

$$\begin{array}{rcccl} M_- & := & \inf_{x \in [a,b]} f(x) & = & f(x_-) \in \mathbb{R}, \\ M_+ & := & \sup_{x \in [a,b]} f(x) & = & f(x_+) \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Also $-\infty < M_- \leqslant f(x) \leqslant M_+ < \infty$ für alle $x \in [a, b]$. Per Monotonie des Integrals und da $g \geqslant 0$ und f sowie konstante Funktionen Riemann-integrierbar sind, gilt

$$\underbrace{\int_a^b M_- g \, \mathrm{d}x}_{M_- \int_a^b g \, \mathrm{d}x =} \quad \leqslant \quad \int_a^b fg \, \mathrm{d}x \quad \leqslant \quad \underbrace{\int_a^b M_+ g \, \mathrm{d}x}_{= M_+ \int_a^b g \, \mathrm{d}x} . \tag{2.1}$$

Da $g \geqslant 0$ überall, gilt $\int_a^b g \, \mathrm{d}x \geqslant 0$. Falls $\int_a^b g \, \mathrm{d}x > 0$, können wir in (3.3) überall durch diese Zahl teilen und erhalten $c := \frac{\int_a^b fg \, \mathrm{d}x}{\int_a^b g \, \mathrm{d}x} \in [M_-, M_+]$. Falls $\int_a^b g \, \mathrm{d}x = 0$, dann folgt aus der o. s. Einschätzungen $0 \leqslant \int_a^b fg \, \mathrm{d}x \leqslant 0$ und damit $\int_a^b fg \, \mathrm{d}x = 0$. In diesem Falle setzen wir ein beliebiges $c \in [M_-, M_+]$. In beiden Fällen sieht man

$$\int_a^b fg \, \mathrm{d}x \quad = \quad c \cdot \int_a^b g \, \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

für ein $c \in [M_-, M_+]$. Da f stetig ist und die Werte M_-, M_+ realisiert, existiert laut des ZWS ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$. Eingesetzt in (2.2) erhalten wir die Behauptung. ■

Aufgabe 2-4.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$;
- $w : [a, b] \to [0, \infty)$ eine Riemann-integrierbare Funktion.

2.2 Satz. *$\sqrt{w}$ ist Riemann-integrierbar.* ⊣

Idee: Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a, b]$. Angesichts der Riemann-Integrierbarkeit von w, reicht es offenbar aus, ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$ zu finden. Als naïver Ansatz wollen nun die Ungleichung

$$|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| \leqslant \tfrac{|y_2-y_1|}{\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1}} \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{\min\{y_1, y_2\}^{-1}}|y_2 - y_1| \tag{2.3}$$

für $y_1, y_2 \in (0, \infty)$ ausnutzen. Doch sofort erkennen wir das Problem: $\min\{y_1, y_2\}^{-1}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Hierfür gibt es einen kleinen Fix: wir verschieben die Funktionswerte um eine beliebig kleine positive Zahl, $\varepsilon > 0$, zeigen, dass $\sqrt{w + \varepsilon}$ Riemann-integrierbar ist, dann lassen wir $\varepsilon \longrightarrow 0$ tendieren und verwenden das Resultat: *Ein (durch gl. Konvergenz erreichbarer) Grenzwert Riemann-integrierbarer Funktionen ist wiederum Riemann-integrierbar.*

Beweis **(von Satz 2.2, Ansatz I).** Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle Zerlegungen $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ von $[a, b]$ beobachte man unter den Definitionen $I_i \coloneqq [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i \coloneqq (x_{i+1} - x_i)$:

$$\begin{aligned}
O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) &= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sup_{x\in I_i}\sqrt{w(x)+\varepsilon} - \inf_{x\in I_i}\sqrt{w(x)+\varepsilon}\right)\cdot\delta x_i \\
&= \sum_{i=0}^{N-1}\left(\sqrt{\sup_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon} - \sqrt{\inf_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon}\right)\cdot\delta x_i \\
&\ \text{weil } \sqrt{(\cdot)+\varepsilon} \text{ stetig ist} \\
&\overset{(2.3)}{\leqslant} \sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left((\sup_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon) - (\inf_{x\in I_i} w(x)+\varepsilon)\right)\cdot\delta x_i \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sup_{x\in I_i} w(x) - \inf_{x\in I_i} w(x)\right)\cdot\delta x_i \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(O_Z(w) - U_Z(w)).
\end{aligned}$$

Kraft dieser Einschätzung erhält man aus der vorausgesetzten Riemann-Integrierbarkeit von w:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \limsup_Z(O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon})) \\
&\leqslant \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\limsup_Z(O_Z(w) - U_Z(w)) = \tfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\cdot 0.
\end{aligned}$$

Also $\limsup_Z(O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon})) = 0$. Also $O_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) - U_Z(\sqrt{w+\varepsilon}) \underset{Z}{\longrightarrow} 0$. Darum stimmen untere und obere Summen von $\sqrt{w+\varepsilon}$ überein. Definitionsgemäß ist $\sqrt{w+\varepsilon}$ somit Riemann-integrierbar für alle $\varepsilon > 0$.

Beachte außerdem, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]}|\sqrt{w(x)+\varepsilon} - \sqrt{w(x)}| &= \sup_{x\in[a,b]}\tfrac{|(w(x)+\varepsilon)-w(x)|}{\sqrt{w(x)+\varepsilon}+\sqrt{w(x)}} \\
&= \sup_{x\in[a,b]}\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{w(x)+\varepsilon}+\sqrt{w(x)}} \\
&\leqslant \sup_{x\in[a,b]}\tfrac{\varepsilon}{\sqrt{0+\varepsilon}+\sqrt{0}} = \sqrt{\varepsilon},
\end{aligned}$$

sodass auf $[a, b]$ das Netz $(\sqrt{w+\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{w}$ konvergiert für $\varepsilon \longrightarrow 0$.[1] Laut Vorlesung ist $\sqrt{w}$ somit Riemann-integrierbar. ■

[1] Wenn man mit Netzen nicht zurecht kommt, reicht es hier schon mit einer Folge aus: fixiere irgendeine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann $\sup_{x\in[a,b]}|\sqrt{w(x)+\varepsilon_n} - \sqrt{w(x)}| \leqslant \sqrt{\varepsilon_n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Es gibt einen weiteren Ansatz. Vorerst brauchen wir zwei kleine Resultate:

2.3 Proposition. *Sei* $u : [a,b] \to [0,\infty)$. *Angenommne,* $\sqrt{u}$ *sei Riemann-integrierbar. Aus der VL wissen wir, dass dann* $u = \sqrt{u}^2$ *ebenfalls Riemann-integrierbar ist. Des Weiteren gilt* $\int_a^b \sqrt{u}\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^{1/2}(\int_a^b u\,\mathrm{d}x)^{1/2}$. ⊣

Beweis. Dies ist eine einfache Anwendung von der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf die Riemann-integrierbaren Funktion $\sqrt{u}$ und $\mathbf{1}_{[a,b]}$. (Siehe ÜG.) ■

2.4 Proposition. *Seien* $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty$. *Dann* $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} \leqslant \sqrt{\beta - \alpha}$. ⊣

Beweis. Falls $\alpha = \beta$, sind beide seiten der behaupteten Ungleichung 0 und deshalb gilt sie. Ansonsten muss $\beta > \alpha \geqslant 0$ und damit $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} > 0$. Durch den üblichen Trick erhalten wir

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \tfrac{\beta-\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\beta-\alpha}\cdot\tfrac{\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}} \leqslant \sqrt{\beta-\alpha}\cdot\tfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+0},$$

da $\sqrt{\cdot}$ monoton ist und $\beta - \alpha \leqslant \beta$ und $\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \geqslant \sqrt{\beta}$. Darum gilt die Ungleichung. ■

Jetzt können wir die Idee hinter dem 2. Ansatz zum Beweis von Satz 2.2 erklären:

> **Idee:** Wir müssen zeigen, dass $O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \xrightarrow[Z]{} 0$ für bzgl. Feinheit der Zerlegungen Z von $[a,b]$. Wiederum suchen wir ein passendes Verhältnis zwischen den Netzen $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z$ und $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z$. Nun, entsprechend der Zerlegungen sind Treppenfunktionen. Darum betrachten wird diese Summen als Integrale von Treppenfunktionen und wenden die Ungleichung in Proposition 2.3 darauf an. Dies dürfen wir, da Treppenfunktionen stets Riemann-integrierbar sind.

***Beweis* (von Satz 2.2, Ansatz II).** Sei $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Setze außerdem $I_i \coloneqq [x_i, x_{i+1}]$ und $\delta x_i \coloneqq (x_{i+1} - x_i)$. Setze auch

$$\begin{aligned} h_i^+ &\coloneqq \sup\nolimits_{x\in I_i} w(x), & g_i^+ &\coloneqq \sup\nolimits_{x\in I_i} \sqrt{w(x)}, \\ h_i^- &\coloneqq \sup\nolimits_{x\in I_i} w(x), & g_i^- &\coloneqq \sup\nolimits_{x\in I_i} \sqrt{w(x)} \end{aligned}$$

für jedes $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ und definiere die Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} h^+ &\coloneqq \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} h_i^+ \cdot \mathbf{1}_{I_i}, & g^+ &\coloneqq \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} g_i^+ \cdot \mathbf{1}_{I_i}, \\ h^- &\coloneqq \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} h_i^- \cdot \mathbf{1}_{I_i}, & g^- &\coloneqq \textstyle\sum_{i=0}^{N-1} g_i^- \cdot \mathbf{1}_{I_i}. \end{aligned}$$

Per Konstruktion dieser Treppenfunktionen sieht man sofort, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b h^+\,\mathrm{d}x &= O_Z(w), & \int_a^b g^+\,\mathrm{d}x &= O_Z(\sqrt{w}), \\ \int_a^b h^-\,\mathrm{d}x &= U_Z(w), & \int_a^b g^-\,\mathrm{d}x &= U_Z(\sqrt{w}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

gelten. Wegen Stetigkeit und (strikter) Monotonie von $\sqrt{\cdot}$ auf $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ beobachte man, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{h_i^+} &= \sqrt{\sup\nolimits_{x\in I_i} w(x)} &= \sup\nolimits_{x\in I_i} \sqrt{w(x)} &= g_i^+, \\ \sqrt{h_i^-} &= \sqrt{\sup\nolimits_{x\in I_i} w(x)} &= \sup\nolimits_{x\in I_i} \sqrt{w(x)} &= g_i^- \end{aligned}$$

für alle $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$. Darum gelten

$$\sqrt{h^+} = g^+ \quad \text{und} \quad \sqrt{h^-} = g^-. \tag{2.5}$$

Mithilfe der o. s. Resultate erhält man

$$
\begin{aligned}
O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) &\overset{(2.4)}{=} \int_a^b g^+ - g^- \,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2.5)}{=} \int_a^b \sqrt{h^+} - \sqrt{h^-} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^b \sqrt{h^+ - h^-} \,\mathrm{d}x \\
&\qquad \text{nach Proposition 2.4} \\
&\qquad \text{und da } 0 \leqslant h^- \leqslant h^+ < \infty \text{ überall} \\
&\leqslant (b-a)^{1/2} \Big(\int_a^b h^+ - h^- \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\
&\overset{(2.4)}{=} (b-a)^{1/2} \sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

wobei die letzte Ungleichung aus Proposition 2.3 folgt, und da $h^+ - h^-$ eine Treppenfunktion und damit Riemann-integrierbar ist.

Da w Riemann-integrierbar ist, gilt nun $(O_Z(w) - U_Z(w))_Z \longrightarrow 0$. Wegen Stetigkeit von $(b-a)^{1/2}\sqrt{\cdot}$ auf $[0, \infty)$ gilt also $((b-a)^{1/2}\sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)})_Z \longrightarrow 0$. Da (2.6) für alle Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt, erhält man

$$0 \leqslant \limsup_Z O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}) \leqslant \limsup_Z (b-a)^{1/2}\sqrt{O_Z(w) - U_Z(w)} = 0$$

Darum gilt $(O_Z(\sqrt{w}) - U_Z(\sqrt{w}))_Z \longrightarrow 0$. Also ist $\sqrt{w}$ Riemann-integrierbar. ■

Kapitel 3.

Woche 4, 27. April 2022

Aufgabe 3-1.

Für diese Aufgabe seien gegeben:

- $a < b$ in $\mathbb{R}$ und wir setzen $X \coloneqq [a, b]$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, $f_n : X \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für jede Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ definiere $\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)| \in [0, \infty]$. Per Definition gilt $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ gdw. f beschränkt ist.

3.1 Behauptung. *Angenommen, so dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genüge folgender Eigenschaft*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \tag{C}$$

Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so dass $(f_n)_n \longrightarrow f$ gleichmäßig. $\dashv$

Beweis. Für jedes $x \in X$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Darum ist $(f_n(x))_n \subseteq \mathbb{R}$ Cauchy. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert somit eine eindeutige Zahl $y_x \in \mathbb{R}$, so dass $(f_n(x))_n \longrightarrow y_x$. Definiere nun $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = y_x$ für $x \in X$. Dann per Wahl wissen wir, dass $(f_n)_n \longrightarrow f$ punktweise. Wir müssen zeigen, dass (1) diese Konvergenz gleichmäßig ist und dass (2) f stetig ist.

Zur gleichmäßigen Konvergenz:

Sei $\varepsilon > 0$. Per Eigenschaft (C) existiert ein Index N_0, so dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $m, n \geqslant N_0$. Sei $m \geqslant N(\varepsilon)$ beliebig. Sei $x \in X$ beliebig. Per Konstruktion von f existiert ein Index n_0, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geqslant n_0$. Wähle nun irgendeinen Index n mit $n \geqslant N_0$ und $n \geqslant n_0$. Dann:

$$|f(x) - f_m(x)| \quad \leqslant \quad |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x)| \quad < \quad \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3},$$

da $n \geqslant n_0$ und $m, n \geqslant N_0$. Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir

$$\|f - f_m\|_\infty \quad = \quad \sup_{x \in X} |f(x) - f_m(x)| \quad \leqslant \quad \tfrac{2\varepsilon}{3} \quad < \quad \varepsilon.$$

Darum wurde

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N : \|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

bewiesen. Also, $(f_n)_n \longrightarrow f$ gleichmäßig.

Zur Stetigkeit von f:

Seien $(x_k)_k \subseteq X$ und $x \in X$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(f(x_k))_k \longrightarrow f(x)$. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen eine Umgebung U von x finden, so dass

$$\forall x' \in U : |f(x') - f(x)| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Wegen gleichmäßiger Konvergenz existiert ein Index N_0, so dass

$$\|f - f_m\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3} \tag{3.2}$$

für $m \geqslant N_0$. Wähle nun irgendeinen Index m mit $m \geqslant N_0$. Da per Voraussetzung f_m stetig ist, existiert eine Umgebung U von x, so dass

$$\forall x' \in U : |f_m(x') - f_m(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

Zwei Anwendungen von (3.2) und eine von (3.3) liefert nun für jedes $x' \in U$:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &\leqslant |f(x') - f_m(x')| + |f_m(x') - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leqslant \|f - f_m\|_\infty + |f_m(x') - f_m(x)| + \|f_m - f\|_\infty \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Darum gilt (3.1). Da x, ε beliebig gewählt wurden ist f stetig. ■

3.2 Bemerkung. *Es spielte keine Rolle, dass es sich um eine Folge handelte: wir hätten auch mit Netzen arbeiten können. Wir benötigten nur die Vollständigkeit des Werteraums. Darum hätten wir $\mathbb{R}$ durch jeden beliebigen vollständig metrischen Raum, (Y, d), ersetzen können. Es spielt überhaupt keine Rolle, dass $X = [a, b]$. Dieser Beweis funktioniert für jeden topologischen Raum, X, solange alle stetigen Funktionen über X beschränkt sind. Dies ist der Fall, wenn X kompakt ist. In der Tat, wissen wir durch einen analogen Beweis mit effektiv keinen Modifizierungen, dass der Raum $C(X, Y)$ (der Raum aller stetigen Funkionen über einem kompakten Raum X nach einem vollständig metrischen Raum (Y, d)) vollständig ist bzgl. der Metrik $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Siehe bspw. [AB05, §3.19, bes. Lemma 3.97, S.124]. Wenn (Y, d) ein vollständig normierter Vektorraum ist (wie z. B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$), so ist d_∞ durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ induziert, und $(C(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ bildet dann einen vollständig normierten Vektorraum. Dies ist einer der ersten Banach-Räume, dem wir begegnen.* ⊣

Aufgabe 3-4.

(b) Zu berechnen:

$$I := \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

> **Idee:** Der Trick hier (oder: einer davon!) ist ein gewöhnlicher: Wir können zwar keine Stammfunktion (zumindest auf einfache Weise) bestimmen, aber als ganzen Wert betrachtet versuchen wir, einen algebraischen Ausdruck für I zu finden. Hierfür manipulieren wir die Domäne und nutzen Symmetrien im Funktionsausdruck aus.

Vorarbeit:

Für solche Tricks hilft es häufig, natürliche auxiliäre Ausdrücke (gleichzeitig) zu untersuchen. In diesem Falle ist dies:

$$J := \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

Was die Symmetrien anbelangt, berufen wir uns auf folgende Erkenntnisse:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Berechnung:

Durch die Verhältnisse zw. $\cos$ und $\sin$ können wir I und J wie folgt in Verbindung setzen:

$$\begin{aligned} J &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(\frac{\pi}{2}-x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (-t')\cdot\log(\sin(t))\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{Subst: } t(x)=\tfrac{\pi}{2}-x;\ \Rightarrow t'=-1 \\ &= -\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{0} \log(\sin(t))\,\mathrm{d}t = I. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wegen der Spiegelsymmetrie von $\sin$ um $\frac{\pi}{2}$ kann man das Integral wie folgt verdoppeln:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(\pi-x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} (-t')\cdot\log(\sin(t))\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{Subst: } t(x)=\pi-x;\ \Rightarrow t'=-1 \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x - \int_{t=\pi}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x=0}^{\pi} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\pi} (2t')\cdot\log(\sin(2t))\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{Subst: } t(x)=\tfrac{1}{2}x;\ \Rightarrow t'=\tfrac{1}{2} \\ &= 2\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t))\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

und damit gilt

$$I = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t))\,\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Jetzt bringen wir diese zwei Umformungen zusammen:

$$\begin{aligned} 2I &\overset{(3.4)}{=} I + J \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\frac{1}{2}\sin(2x))\,\mathrm{d}x \\ &\quad \text{wegen trig. Identität} \\ &= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\log(\frac{1}{2}) + \log(\sin(2x))\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{(3.5)}{=} \tfrac{\pi}{2}\cdot\log(\tfrac{1}{2}) + I. \end{aligned}$$

Darum erhält man folgenden algebraischen Ausdruck für I:

$$2I = \tfrac{\pi}{2}\cdot\log(\tfrac{1}{2}) + I$$

Daraus ergibt sich, dass $I = \frac{\pi}{2}\cdot\log(\frac{1}{2}) = \boxed{-\frac{\pi}{2}\log(2)}$ der gesuchte Werte des Integrals ist.

3.3 Bemerkung. *Dieser Berechnung zufolge ist der Mittelwert von* $\log(\sin(\cdot))$ *auf dem Gebiet* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *gleich* $\log(\frac{1}{2})$, *also* $\log(\sin(\frac{\pi}{6}))$. *Wegen der Symmetrien von* $\sin$ *können wir daraus erschließen, dass der Mittelwert von* $\log|\sin(\cdot)|$ *auf* $[0, 2\pi]$ *auch gleich* $\log(\frac{1}{2})$ *ist.* $\dashv$

Referenzen

[AB05] Charalambos D. Aliprantis and Kim C. Border. *Infinite Dimensional Analysis, a Hitchhiker's Guide.* Springer-Verlag, 3rd edition, 2005.

[Dei14] Anton Deitmar. *Analysis.* Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2014.

[For16] Otto Forster. *Analysis 1.* Grundkurs Mathematik. Springer Spektrum, Wiesbaden, 12 edition, 2016.

[Pog 2] Felix Pogorzelski. Vorlesungsskript: Analysis I–II, 2021–2. basierend auf dem Skript von Daniel Lenz 2013–14 + 2020–21.