Ana I, Woche 13 Übung

20. Januar 2022

(Diese Woche wurde vertreten)

ÜB11 A1

Gegeben:

$T : [0,\pi] \to \mathbb{R}$

Annahme

(Ann$_1$) T stetig

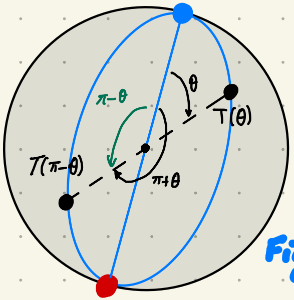


Fig. 1. Darstellung von antipodalen Stellen auf Erdkugel.

Behauptung. Es gibt **antipodale** Stellen mit gleicher Temperatur. D.h. $\exists\, \theta \in [0,\pi]$ s.d. $T(\pi-\theta) = T(\theta)$.

$\pi-\theta$, θ „antipodal" (siehe **Fig. 1**)

Beweis.

Setze

$$f : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & T(\underbrace{\pi-\theta}_{\in [0,\pi]}) - T(\theta) \end{array}$$

Dann ist f wohldefiniert.

Des Weiteren gilt für alle $\theta \in [0,\pi]$ und $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\pi]$

Angenommen, $\theta_n \longrightarrow \theta$.

$\Longrightarrow \quad \pi - \theta_n \longrightarrow \pi - \theta$

$\overset{\text{Ann. 2}}{\Longrightarrow} \quad T(\theta_n) \xrightarrow[n]{} T(\theta)$, und $T(\pi-\theta_n) \xrightarrow[n]{} T(\pi-\theta)$.

$\Longrightarrow \quad f(\theta_n) = T(\pi-\theta_n) - T(\theta_n) \xrightarrow[n]{} T(\pi-\theta) - T(\theta) = f(\theta)$.

Also ist f stetig.

Alternativer Beweis: $\theta \in [0,\pi] \longmapsto \pi - \theta \in [0,\pi]$ ist stetig. Darum ist die Verkettung $\theta \in [0,\pi] \mapsto T(\pi-\theta)$ stetig. Und als Differenz der stetigen Fkt. ist f stetig.

Fall 1. $T(\pi) = T(0)$. $\rightsquigarrow$ Gut!

antipodale Stellen

Fall 2. $(f(0) =) \; T(\pi) - T(0) \neq 0$.

Dann $f(\pi) = T(\cancel{\pi-\pi}_{0}) - T(\pi) = -f(0)$. $^{(*)}$

Da $f(0)$ und damit $f(\pi)$ ungleich 0 sind und da wegen $(*)$ das Vorzeichen wechselt, und da f stetig ist (siehe oben), existiert laut **ZWS** ein $\theta_0 \in (0,\pi)$ s.d. $f(\theta_0) = 0$.

Daraus folgt $T(\pi-\theta_0) = T(\theta_0)$.

antipodale Stellen

Also existiert in allen Fällen antipodale Stellen mit gleichem T-Wert. □

ÜB11 A2

a) Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Behauptung. g ist überall stetig.

Beweis.

- Die Abbildungen $f_1 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -1/x$

  $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  sind bekanntermaßen stetig. Darum ist die Komposition

  $$\left(g|_{(0,\infty)} = \right) \exp \circ f_1$$

  stetig.

  $\Longrightarrow$ g ist stetig in jedem Pkt aus $(0,\infty)$.

- $g|_{(-\infty,0)}$ verhält sich konstant und ist deshalb stetig.

  $\Longrightarrow$ g ist stetig in jedem Pkt aus $(-\infty, 0)$.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass g im Pkt 0 stetig ist.

Um dies zu zeigen, prüfen wir nach Links- und Rechtskonvergenz:

Linkskonvergenz:

$$\boxed{\begin{aligned} &(-\infty, 0) \ni x \longrightarrow 0 \\ &\Longrightarrow g(x) = 0 \longrightarrow 0 = g(0) \end{aligned}} \quad (*)$$

Also ex. Linksgrenzwert: $\lim_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$.

Rechtskonvergenz:

$$\boxed{\begin{aligned} &(-\infty, 0) \ni x \longrightarrow 0 \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty \\ &\Longrightarrow g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0 = g(0) \end{aligned}} \quad (**)$$

Also ex. Rechtsgrenzwert: $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$

Aus $(*)$ + $(**)$ folgt, dass g auch im Pkt 0 stetig ist. $\square$

ÜB11 A2

b) Sei $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$: x \longmapsto \begin{cases} |x|^p \cdot \log|x| & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

mit $p > 0$

Behauptung. h ist überall stetig für alle $p > 0$, insbesondere für $p = \frac{1}{2}$, wie in der Aufgabe.

Beweis.

- Die Abbildungen $f_1 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
  $: t \longmapsto t^p$
  $f_2 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
  $: t \longmapsto \log t$

sind bekanntermaßen stetig.
Darum ist das Produkt

$f := f_1 \cdot f_2 : t \in (0,\infty) \longmapsto t^p \cdot \log t$

stetig.
Da nun $|\cdot| : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow (0,\infty)$
stetig ist, ist die Komposition

$(h|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} =)\ f \circ |\cdot|$

stetig.

$\Longrightarrow$ h ist stetig in jedem Pkt aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2

Es bleibt zu zeigen, dass h im Pkt 0 stetig ist.

Nun ist $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ stetig, surjektiv, und

$t \to -\infty \Rightarrow pt \longrightarrow -\infty$ da $p > 0$ $(*)$
$\Rightarrow \exp(pt) \longrightarrow 0$

Also $t \to -\infty$

$\Longrightarrow h(\underbrace{\exp(t)}_{>0}) = \underbrace{\exp(pt)}_{\to 0 \text{ nach } (*)} \cdot t$ $(\#)$

siehe nächste Aufgabe

und da $p > 0$ und $\exp(\cdot)$ alle Polynome schlägt, gilt
$h(\exp(t)) \longrightarrow 0 = h(0)$.

Darum

$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 0$

$\Rightarrow (0,\infty) \ni |x| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow t_x := \log|x| \longrightarrow -\infty$

$\Rightarrow h(x) = h(|x|) = h(\exp(t_x)) \xrightarrow{(\#)} 0 = h(0)$

da h symmetrisch konstriert ist.

Darum ist h stetig im Pkt 0 auch. ☐

ÜB11 A3 Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$.

a) $x^{-k} \exp(\alpha x)$

$= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\frac{(\alpha x)^j}{j!}}_{\geq 0,\ \text{da } \alpha > 0 \text{ und solange } x \geq 0} / x^k$

da alle Summanden ≥ 0

$\geq \frac{(\alpha x)^{k+1}}{(k+1)!} / x^k$ solange $x \in (0, \infty)$

$= \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} \cdot x$

$\longrightarrow \infty$ als $x \longrightarrow +\infty$.

Folglich $\lim_{\mathbb{R} \ni x \to +\infty} x^{-k} \exp(\alpha x)$

$= \lim_{(0,\infty) \ni x \to +\infty} x^{-k} \exp(\alpha x) = +\infty$,

w.z.z.w.

b) aus (a) folgt

$x^k \exp(-\alpha x) = \left(x^{-k} \exp(\alpha x)\right)^{-1} \longrightarrow 0$

für $(0, \infty) \ni x \longrightarrow +\infty$.

Darum $\lim_{\mathbb{R} \ni x \to +\infty} x^k \exp(-\alpha x)$

$= \lim_{(0,\infty) \ni x \to +\infty} x^k \exp(-\alpha x) = 0$

w.z.z.w.

c) Sei $x \in (0, \infty)$. Dann

$x^k \log(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^k \log(x^{2k})$

$= \frac{1}{2k} \sqrt{x^{2k}} \log(x^{2k})$

$= \frac{1}{2k} h(x^{2k})$

Darum $x \longrightarrow 0^+ \Rightarrow x^{2k} \longrightarrow 0^+$

$\Rightarrow h(x^{2k}) \longrightarrow h(0) = 0$ siehe Aufgabe A2(b)

$\Rightarrow x^k \log(x) \longrightarrow 0$,

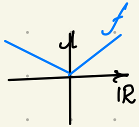
w.z.z.w.

3

4

ÜB11 A4

a) $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x| \in (0,\infty)$



Beh. $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ diff}^{\text{bar}} \text{ im } x\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Bew. (⊇):

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sei $r := |x|$.

Dann $\underbrace{(x-r,\ x+r)}_{\subseteq \begin{cases} (0,\infty) ; & x>0 \\ (-\infty,0) ; & x<0 \end{cases}} \setminus \{x\} \ni x' \longrightarrow x$ per Wahl von r

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \begin{cases} \dfrac{x'-x}{x'-x} & ; x>0 \\ \dfrac{(-x')-(-x)}{x'-x} & ; x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & : x>0 \\ 1 & : x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \longrightarrow \begin{cases} -1 & : x>0 \\ 1 & : x<0 \end{cases}$$

Darum ist f diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x mit

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & : x>0 \\ 1 & : x<0 \end{cases}$$

(⊆): Sei $x = 0$. **Z:** f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt 0.

Der Skizze links entnehmen wir, dass dies zustande kommt, weil Linksableitung ≠ Rechtsableitung. Das zeigen wir formal:

- $(\overset{=0}{x}, \infty) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{x'-0}{x'-0} = 1 \longrightarrow 1.$$

Also $\lim\limits_{x' \to x^+} \dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ ex. und $= +1$.

- $(-\infty, \overset{=0}{x}) \ni x' \longrightarrow x$

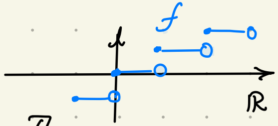
$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{(-x')-0}{x'-0} = -1 \longrightarrow -1.$$

Also $\lim\limits_{x' \to x^+} \dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ ex. und $= -1$.

ungleich

Darum ex. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ nicht.
D.h. f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt 0. □

ÜB11 A4...



b) $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$

Beh. $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ diff}^{\text{bar}} \text{ im } x\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Bew. ($\supseteq$): Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$

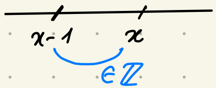
Dann $\underbrace{(\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \setminus \{x\}} \ni x' \longrightarrow x$

$\Rightarrow f(x') = \lfloor x \rfloor = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = 0 \longrightarrow 0$$

Darum ist f diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x mit $f'(x) = 0$.

($\subseteq$): Sei $x \in \mathbb{Z}$.



Dann $\underbrace{(x-1, x)} \ni x' \longrightarrow x$

$\Rightarrow f(x') = x - 1 = f(x) - 1$

$$\Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{1}{x' - x} \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x' \to x^-} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ ex. nicht in } \mathbb{R}$$

Darum ist f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x. $\square$

c) $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{sgn}(x) \in \{0, \pm 1\}$

5

Beh. $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ diff}^{\text{bar}} \text{ im } x\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bew. ($\supseteq$): Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setze $r := |x| > 0$.

Dann $\underbrace{(x - r, x + r) \setminus \{x\}}_{\subseteq \begin{cases} (0, \infty) & : x > 0 \\ (-\infty, 0) & : x < 0 \end{cases}} \ni x' \longrightarrow x$ per Wahl von r

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \begin{cases} \frac{(+1) - (+1)}{x' - x} & : x > 0 \\ \frac{(-1) - (-1)}{x' - x} & : x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = 0 \longrightarrow 0$$

Darum ist f diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x mit $f'(x) = 0$

($\subseteq$): Sei $x = 0$

Dann $\underbrace{(0, 1)} \ni x' \longrightarrow x$

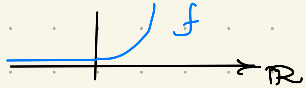
$\Rightarrow f(x') = +1$

$$\Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{1 - 0}{x' - x} \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x' \to x^-} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ ex. nicht in } \mathbb{R}$$

Darum ist f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x. $\square$

ÜB11 A4...



d) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$

Beh. f ist überall diff^bar mit

$$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. Auf $(0,\infty)$:

Sei $x \in (0,\infty)$ beliebig.

Z: $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \longrightarrow 2x$ für $x' \in \mathbb{R}\setminus\{x\}$ mit $x' \longrightarrow x$.

Da $x > 0$ können wir o.E. $x' \longrightarrow x$ innerhalb $(0,\infty)$ untersuchen. Es gilt:

$(0,\infty) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Longrightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{x'^2 - x^2}{x'-x} = x' + x \longrightarrow x + x = 2x.$$

w.z.z.w.

6

Auf $(-\infty,0)$: Sei $x \in (-\infty,0)$ beliebig.

Z: $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \longrightarrow 0$ für $x' \in \mathbb{R}\setminus\{x\}$ mit $x' \longrightarrow x$.

Da $x < 0$ können wir o.E. $x' \longrightarrow x$ innerhalb $(-\infty,0)$ untersuchen. Es gilt:

$(-\infty,0) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Longrightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{0-0}{x'-x} = 0 \longrightarrow 0.$$

w.z.z.w.

Im Pkt 0: Sei $x = 0$. Dann

$\mathbb{R}\setminus\{x\} \ni x' \longrightarrow x$

$$\Longrightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \begin{cases} \frac{x'^2-0}{x'-0} & : x' > 0 \\ \frac{0-0}{x'-0} & : x' < 0 \end{cases}$$

(der Fall $x'=0$ ist ausgeschlossen)

$$= \begin{cases} x' & : x' > 0 \\ 0 & : x' < 0 \end{cases}$$

$$= \max\{0, x'\} \longrightarrow 0$$

Darum $\lim_{x' \to x} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ ex. und $= 0$

w.z.z.w. $\square$

ÜB11 Z1.

Zu finden: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

i) f diff^bar im Pkt 0

ii) f nicht stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Bsp. aus ÜG: $f: x \mapsto x^2 \cdot 1_{\mathbb{Q}}(x)$

Differenzierbarkeit im Pkt 0:

Es gilt $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \to 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{x^{\cancel{2}}-0}{\cancel{x-0}} \to x & : x \in \mathbb{Q} \\ \cancel{\frac{0-0}{x-0}} \to 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$= x \cdot 1_{\mathbb{Q}}(x).$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| = |x| \cdot \underbrace{1_{\mathbb{Q}}(x)}_{=0 \text{ od. } 1}$$

$$\leq |x| \to 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to 0$$

Also ist f diff^bar im Pkt 0 mit $f'(0)=0$.

Unstetigkeit auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig.

Fall 1 $x \in \mathbb{Q}$.

sonst $\sqrt{2} = 2^n \cdot (x + \frac{\sqrt{2}}{2^n} - x)$ $\in \mathbb{Q}$ — Widerspruch!

Dann $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{2^n} \notin \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$

und $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, während (per Konstr.)

$$f(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \underset{\text{da } x\neq 0}{\neq} x^2 \underset{\text{da } x\in\mathbb{Q}}{=} f(x),$$

sodass f im Pkt x nicht stetig ist.

Fall 2 $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ **dicht** ist, existiert eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit

(*) $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Andererseits gilt

wegen (*) + Stetigkeit von $t \mapsto t^2$:

$$f(q_n) = \boxed{q_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2} \underset{\text{da } x\neq 0}{\neq} 0 \underset{\text{da } x\notin\mathbb{Q}}{=} f(x)$$

Darum ist f im Pkt x nicht stetig.

In allen Fällen ist f im Pkt x nicht stetig.

Daher erfüllt f (i) + (ii).

7

ÜB11 Z2

Behauptung. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis.

Nebenrechnung:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right|$$

$$= \frac{|y^2 - x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} \qquad \le \frac{1}{1+0^2} = 1$$

$$= \overbrace{|y-x|}^{\text{wird unser „}\delta\text{" sein}} \cdot \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\le |y-x| \cdot \left(\frac{|x|}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} + \frac{|y|}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$\le |y-x| \cdot (h(|x|) + h(|y|)),$$

wobei $h : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$
$: t \longmapsto \frac{t}{1+t^2}$.

Darum reicht es aus zu zeigen, dass h nach oben beschränkt ist.

8

(Obere) Schranke von h:

Sei also $t \in [0,\infty)$ beliebig.

Dann $0 \le (1-t)^2 = 1 + t^2 - 2t$

$$\Longrightarrow \quad t \le \frac{1}{2} \underbrace{(1+t^2)}_{\ge 1 > 0}$$

$$\Longrightarrow (0 \le)\ h(t) = \frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}.$$

Wir führen diese Beobachtungen jetzt alle zusammen:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Sei $\delta := \varepsilon$.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann
$|x - y| < \delta$

$$\Longrightarrow |f(y) - f(x)| \overset{\text{siehe Nebenrechnung links}}{\le} |y-x| \cdot \underbrace{(h(|x|) + h(|y|))}_{\text{s.o.}, \ \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$$

$$\le |y-x| \cdot 1$$

$$< \delta = \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}:$
$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

D.h. f ist gleichmäßig stetig.