Ana I, Woche 14 Übung

0

27. Januar 2022

Anmerkung: $\log = \log_e$

Nebenrechnung 1

Für $t \in (1,\infty)$ gilt

$$\log(t) = \log(t) - \log(1) \overset{\text{MWS}}{=} (t-1)\cdot \log'(s)$$

für ein $s \in (1,t)$

$$= \underbrace{\frac{t-1}{s}}_{>0} \in \left(\frac{t-1}{t}, \frac{t-1}{1}\right) = \left(1-\frac{1}{t}, t-1\right)$$

Für $t \in (0,1)$ gilt

$$\log(t) = \log(t) - \log(1) \overset{\text{MWS}}{=} (t-1)\cdot \log'(s)$$

für ein $s \in (t,1)$

$$= \underbrace{\frac{t-1}{s}}_{<0} \in \left(\frac{t-1}{t}, \frac{t-1}{1}\right) = \left(1-\frac{1}{t}, t-1\right)$$

Also gilt in allen Fällen (offensichtlich auch für 1), dass $1-\frac{1}{t} \leq \log(t) \leq t-1$ für $t \in (0,\infty)$

äquivalent: $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$ für $t \in (-1,\infty)$.

Nebenrechnung 2

Sei

$$P(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

eine formale Potenzreihe mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ und Konvergenzradius

$$r := 1 / \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0$$

Dann ist $P(x)$ absolut konvergent für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < r$ (und divergent für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > r$).

Des Weiteren ist P sogar (beliebig oft) diff.bar auf $U_r(0) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\}$. Insbesondere ist P auf $U_r(0)$ stetig.

Seien nun $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $J \subseteq \mathbb{N}_0$ nicht leer und sei $N := \min J \in \mathbb{N}_0$.

Betrachte die formale Reihe

$$Q(x) = c \cdot \sum_{n\in J} a_n x^{n-N} = \sum_{n\geq 0} \underbrace{c\cdot a_{n+N} \cdot 1_J(n+N)}_{a'_n} x^n.$$

Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \underbrace{|a'_n|^{1/n}}_{\leq |c\cdot a_{n+N}|^{1/n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \underbrace{|c|^{1/n}}_{\xrightarrow[n]{} 1,\ \text{da } c\neq 0} |a_{n+N}|^{1/n}.$$

$$= 1 \cdot \limsup_{n\to\infty} |a_{n+N}|^{\frac{1}{n+N}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{N}{n}\right)}_{\xrightarrow[n]{} 1}}$$

$$= 1 \cdot \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1/r$$

$\Longrightarrow$ Konvergenzradius von Q

$$= r' := 1 / \limsup_{n\to\infty} |a'_n|^{1/n} \geq r$$

Insbesondere ist die Potenzreihe Q stetig auf $\mathcal{U}_{r'}(0)$ $(\supseteq \mathcal{U}_r(0))$.

Da $r>0$ folgt aus der Stetigkeit von Q auf $\mathcal{U}_r(0)$:

$$(-r,r)\ni x \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow c\cdot \sum_{n\in J} a_n x^{n-N} = Q(x) \longrightarrow Q(0) = c\cdot a_N,$$

da $N\in J$.

Darum existiert $\lim_{x\to 0} c\cdot\sum_{n\in J} a_n x^{n-N}$ und ist gleich $c\cdot a_N$, so lange $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist und $N=\min J$.

ÜB12 A1

1

a) Beobachtung 1

$$P_1(x) = e^x + e^{-x} - 2$$

$$= \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}}_{\text{konv rad } \infty} + \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{n!}}_{\text{konv rad } \infty} - 2$$

$$= \underbrace{\sum_{n\in J_1} 2\cdot\frac{x^n}{n!}}_{\text{Konv rad. } \infty}$$

$J_1 = \{n\in\mathbb{N} \mid n\geq 2 \text{ gerade}\}$

$\Longrightarrow$

Nebenrechnung 2

$$\Longrightarrow \frac{P_1(x)}{x^2} = \sum_{n\in J_1} 2\cdot\frac{x^{n-2}}{n!}$$

$2 = \min J_1$

$$\longrightarrow \sum_{n\in J_1} 2\cdot\frac{0^{n-2}}{n!} = 1.$$

für $\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni x\longrightarrow 0$.

Beobachtung 2

$$P_2(x) = 1-\cos(x)$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{Konv.rad. } \infty}$$

$$= \sum_{n\in J_2} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{x^n}{n!} \qquad J_2 = \{n\in\mathbb{N} \mid n\geq 2, \ n \text{ gerade}\}$$

Konv.rad. noch ∞

Nebenrechnung$_2$

$$\Longrightarrow \frac{P_2(x)}{x^2} = \sum_{n\in J_2} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{x^{n-2}}{n!} \qquad 2 = \min J_2$$

$$\longrightarrow \sum_{n\in J_2} (-1)^{[\frac{n}{2}]} \frac{0^{n-2}}{n!} = \frac{1}{2}$$

für $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 0$.

Folglich
$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)} = \frac{\overbrace{P_1(x)/x^2}^{\to 1}}{\underbrace{P_2(x)/x^2}_{\to 1/2 \neq 0}} \longrightarrow \frac{1}{1/2}$$

Darum
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)} = 2. \quad ///$$

b) Sei: $(0,\infty) \ni x \longrightarrow +\infty$.

Dann wegen Nebenberechnung$_1$

$$x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \leq x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$= \frac{x}{1+x} = 1 - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 0} \to 1-0=1$$

Also
$$\underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\to 1} \leq x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \underbrace{1}_{\to 1}$$

$$\overset{\text{Sandwich Lemma}}{\Longrightarrow} \quad x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 1.$$

Darum
$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1. \quad ///$$

2

c) Behauptung $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \underbrace{\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}}_{f(x):=}$ ex. nicht.

Beweis.

Da sin, cos stetig sind, gilt

$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \to 0$

$\Rightarrow \sin(x)+\cos(x) \longrightarrow \sin(0)+\cos(0) = 1$

Also existiert $\delta > 0$ s.d. für alle $x \in (-\delta, \delta)\setminus\{0\}$

$$|\sin(x)+\cos(x) - 1| < 1/2$$

Also

$$\left|\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}\right| \overset{\text{Δ-Ungleichung}}{\geqslant} \left|\frac{1}{x}\right| - \left|\frac{\sin(x)+\cos(x)-1}{x}\right|$$

$$\geqslant \left|\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{x}\right|$$

$$= \frac{1}{2|x|} \longrightarrow \infty$$

für $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 0$.

Darum existiert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |f(x)|$ nicht.

Darum kann $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)$ auch nicht existieren. $\square$

d) $(0,1) \ni x \longrightarrow 1$

$\Rightarrow (-\infty, 0) \ni \underbrace{\log(x)}_{=:t} \longrightarrow \log(1) = 0$

$$\Rightarrow \log(x)\log(1-x)$$

$$= t\cdot\log(1-e^t)$$

$$= t\cdot\log\left(\frac{e^0-e^t}{\underbrace{0-t}}\cdot(0-t)\right)$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \frac{d}{d\tau}e^\tau\Big|_{\tau=s} \text{ für ein } s_t \in (t,0)$$

$$= e^{s_t}$$

$$= t\cdot\log(e^{s_t}\cdot|t|) \text{ für ein } s \in (t,0)$$

$$= \underbrace{t\cdot s_t}_{} - \underbrace{|t|\cdot\log|t|}_{\to 0 \text{ (siehe ÜB10)}} \quad \text{wenn } t \to 0$$

$|\cdot| \leq |t|\cdot|t|$

$= t^2 \to 0$

also $t\cdot s_t \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \log(x)\log(1-x) \longrightarrow 0-0 = 0$$

Darum $\lim\limits_{x\to 1^-} \log(x)\log(1-x) = 0$ //.

3