Ana I, Woche 10 Übung

16. Dez 2021

Frohe Weihnachten!

Agenda

Orga

ÜB 7, 9

ÜB 7 A1

a) $\forall a \in \mathbb{R}^+$:

Behauptung. $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} \frac{1}{e(a)}$

Beweis.

1) $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e(a)$

2) $\left(1 + \frac{-a}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e(-a)$

Gilt allgemein (siehe VL).

Wir beobachten (Multiplikationsregel)

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{1) + 2)} e(a) \cdot e(-a)$$

$$\|$$

$$\left(1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^n \dashrightarrow 1$$

Sei n „genügend groß" $(n > a)$

Dann $-\left(\frac{a}{n}\right)^2 > -1$

$\overset{\text{Bernoulli}}{\Longrightarrow}$ $1 \geq \left(1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)$

$= 1 - \frac{a^2}{n}$

Begr. $\in [0, 1]$ da $\frac{a}{n} < 1$ per Wahl

Also $\overset{\xrightarrow[n]{} 1}{\boxed{1}} \geq \left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^n \geq \overset{\xrightarrow{} 1}{1-\frac{a^2}{n}}$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

$$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad \left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^n \longrightarrow 1.$$

$$\Longrightarrow \quad \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e(a)e(-a)$$

$$\| $$

$$\left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^n \longrightarrow 1$$

Eind. Grenzwerte

$$\Longrightarrow \quad e(a)e(-a) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad e(-a) = e(a)^{-1}$$

Darum $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e(-a) = \frac{1}{e(a)}$

$\square$

ÜB7 A2

1

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ für alle n

Behauptung. $\gamma := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$

$$\Longrightarrow \quad x_n \xrightarrow[n]{} 0.$$

Beweis. Fixiere ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\gamma < r < 1$ (strikt!)

Dann aus

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\sup_{k\geq n} \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|}_{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \gamma < r$$

Char. von Inf

$$\Longrightarrow \text{ ex } n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \sup_{k\geq n_0}\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| = a_{n_0} < r \quad (*)$$

Beh. $\forall k \geq n_0 : \quad |x_k| \leq |x_{n_0}| \cdot r^{k-n_0}$

↳ siehe anschließende Bel.

Daraus folgt $(x_k)_{k\geq n_0} \longrightarrow 0$, da $|r| = r < 1$

$$\Longrightarrow \quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

$\square$

Beh. Mit dem Setup im Beweis

$\forall k \geq n_0: \quad |x_k| \leq |x_{n_0}| \, r^{k-n_0}.$

Bew

I A. $\quad k = n_0: \quad |x_k| = |x_{n_0}| = |x_{n_0}| r^{k-n_0}$

I S. $\quad$ Sei $k \geq n_0$. Angenommen,

$$|x_k| \leq |x_{n_0}| \, r^{k-n_0}. \qquad (IV)$$

Dann
$$|x_{k+1}| = |x_k| \cdot \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \overset{*}{\leq} |x_k| \cdot r \overset{IV}{\leq} |x_{n_0}| \, r^{k-n_0} r = |x_{n_0}| \, r^{k+1-n_0}$$

$\Longrightarrow$ Aussage gilt für $k+1$. $\square$

2

b) $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 1$$

geht auch mit $x_n = \frac{1}{n^p} \quad p > 0$

c) $$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{q^{n+1} \cdot n!}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\,n!} \; q^n} = \frac{q}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0$$

$\left(\varepsilon\text{-Arg}: \; n_\varepsilon := \frac{2}{q\varepsilon} \right)$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 0$$

$\overset{a)}{\Longrightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge d.h. $x_n \xrightarrow[n]{} 0.$

d) $$\left|\frac{x_{n+1}^{-1}}{x_n^{-1}}\right| = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{1}{n})} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{4}$$

$\Longrightarrow$ wie bei **c)** $\quad x_n^{-1} \xrightarrow[n]{} 0$

$\Longrightarrow \quad x_n = |x_n^{-1}|^{-1} \xrightarrow[n]{} +\infty$

ÜB7 A3

n	$f^{(n)}(1)$
1	1
2	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$
5	$\frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
k	$\frac{p_k}{q_k}$
$k+1$	$\frac{1}{1+\frac{p_k}{q_k}} = \frac{q_k}{p_k+q_k} =: \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$

Bkh Setze

$p_1 := 1$

$q_1 := 1$

$p_{k+1} := q_k$

$q_{k+1} := q_k + p_k$

für alle $k \geq 1$.

Dann
$\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(1) = \frac{p_n}{q_n}$.

Bew (Induktion)

3

Wir sehen für $k \geq 1$:

$$q_{k+2} = q_{k+1} + p_{k+1} = q_{k+1} + q_k.$$

$\Longrightarrow (q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Fib. Folge, die mit $1; 2$ startet.

$$\Longrightarrow \quad q_k = \alpha\,\Phi^{k+1} + \bar{\alpha}\,(-\Phi)^{-(k+1)}$$

wobei $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

und $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{\alpha\,\Phi^{(k-1)+1} + \bar{\alpha}(-\Phi)^{-(k-1)}}{\alpha\,\Phi^{(k+1)} + \bar{\alpha}(-\Phi)^{-(k+1)}} \xrightarrow{k\geq 2} \frac{1}{\Phi}$$

$$\Longrightarrow \quad (a_k)_{k\geq 2} \longrightarrow \frac{1}{\Phi}$$

$$(a_k)_{k\geq 1} \longrightarrow \frac{1}{\Phi}$$

$\square$

4

Anmerkung ÜB 9

$(x_j)_{j\in J}$ — Folge (muss nicht über $\mathbb{N}$ sein!)

$$S \geq \underbrace{\sum_{j\in E} x_j}_{} = \underbrace{\overbrace{x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_n}}^{n=|E| \text{ Elemente}}}_{} \in [0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$$

wobei $j_1, j_2, \dots, j_n$ eine Aufzählung der El. in E ist

leere Summe: $\sum_{j\in\emptyset} x_j \overset{\text{Def}^n}{=} 0$

sonst > 0, da alle $x_j > 0$

$$M := \Big\{ \overbrace{\sum_{j\in E} x_j}^{s_E} \;\Big|\; E \subseteq J, \text{ endl.} \Big\}$$

$$= \{ s_E \mid E \subseteq J, \text{ endl.} \}$$

$s_E \in [0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$

$S = \sup \dots$

Falls M nicht nach oben beschr.

$$\Longrightarrow \quad \sup M \overset{\text{Def}^n}{=} +\infty$$

(aber dies ist bei uns nicht der Fall, also $S \in \mathbb{R}^+$)