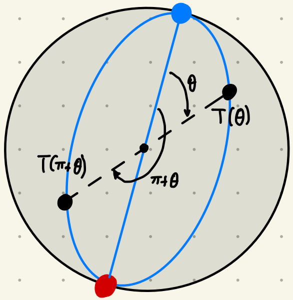
Ana I, Woche 13 Übung

20. Januar 2022

(Diese Woche wurde vertreten)

ÜB11 A1



Gegeben:

$T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

Annahmen

(Ann$_1$) $T(2\pi) = T(0)$

(damit Modell sinnvoll zu einer Kugel passt)

(Ann$_2$) T stetig

Behauptung. Es gibt **antipodale** Stellen mit gleicher Temperatur. D.h. $\exists\, \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ s.d. $\underbrace{|\theta_1 - \theta_2| = \pi}_{\text{d.h. } \theta_1, \theta_2 \text{ „antipodal"}}$ und $T(\theta_1) = T(\theta_2)$.

Beweis.

Setze
$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$: \theta \longmapsto T(\underbrace{\pi + \theta}_{\in [\pi, 2\pi]}) - T(\theta)$$

Dann ist f wohldefiniert.

Des Weiteren gilt für alle $\theta \in [0, \pi]$ und $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \pi]$

Angenommen, $\theta_n \to \theta$.

$\Longrightarrow \quad \pi + \theta_n \longrightarrow \pi + \theta$.

$\overset{\text{Ann. 2}}{\Longrightarrow} \quad T(\theta_n) \xrightarrow[n]{} T(\theta)$, und
$T(\pi + \theta_n) \xrightarrow[n]{} T(\pi + \theta)$.

$\Longrightarrow f(\theta_n) = T(\pi + \theta_n) - T(\theta_n) \xrightarrow[n]{} T(\pi + \theta) - T(\theta) = f(\theta)$.

Also ist f stetig.

Alternativer Beweis: $\theta \in [0, \pi] \longmapsto \pi + \theta \in [0, 2\pi]$ ist stetig. Darum ist die Verkettung $\theta \in [0, \pi] \mapsto T(\pi + \theta)$ stetig. Und als Differenz der stetigen Fkt. ist f stetig.

Fall 1. $T(\pi) = T(0)$. $\rightsquigarrow$ Gut!

antipodale Stellen

Fall 2. $a := T(\pi) - T(0) \neq 0$.

Dann $b := T(2\pi) - T(\pi) \overset{\text{Ann-1}}{=} T(0) - T(\pi) = -a$

Also $f(0) = a < 0 < -a = f(\pi)$

oder $f(0) = -a < 0 < a = f(\pi)$.

In jedem Falle existiert laut **ZWS** und wegen Stetigkeit von f ein $\theta_0 \in (0, \pi)$, so dass $f(\theta_0) = 0$.

Daraus folgt $T(\pi + \theta_0) = T(\theta_0)$.

antipodale Stellen

Also existiert in allen Fällen antipodale Stellen mit demselben T-Wert. ∎

ÜB11 A2

a) Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$: x \longmapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Behauptung. g ist überall stetig.

Beweis.

- Die Abbildungen $f_1 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
  $: x \longmapsto -1/x$

  $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  sind bekanntermaßen stetig.
  Darum ist die Komposition

  $$(g|_{(0,\infty)} =) \exp \circ f_1$$

  stetig.

  $\Longrightarrow$ g ist stetig in jedem Pkt aus $(0,\infty)$.

- $g|_{(-\infty,0)}$ verhält sich konstant und ist deshalb stetig.

  $\Longrightarrow$ g ist stetig in jedem Pkt aus $(-\infty,0)$.

Es bleibt also nur zu zeigen, dass g im Pkt 0 stetig ist.

Um dies zu zeigen, prüfen wir nach Links- und Rechtskonvergenz:

Linkskonvergenz:

$$(-\infty,0) \ni x \longrightarrow 0$$
$$\Longrightarrow \quad g(x) = 0 \longrightarrow 0 = g(0) \qquad (*)$$

Also ex. Linksgrenzwert: $\lim_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$.

Rechtskonvergenz:

$$(-\infty,0) \ni x \longrightarrow 0$$
$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty$$
$$\Longrightarrow \quad g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0 = g(0) \qquad (**)$$

Also ex. Rechtsgrenzwert: $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$

Aus $(*)$ + $(**)$ folgt, dass g auch im Pkt 0 stetig ist. $\square$

1

ÜB11 A2

b) Sei $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$: x \mapsto \begin{cases} |x|^p \cdot \log|x| & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

mit $p > 0$

Behauptung. h ist überall stetig für alle $p > 0$, insbesondere für $p = \frac{1}{2}$, wie in der Aufgabe.

Beweis.

- Die Abbildungen

$$f_1 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^p$$

$$f_2 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \log t$$

sind bekanntermaßen stetig.

Darum ist das Produkt

$$f := f_1 \cdot f_2 : t \in (0,\infty) \longmapsto t^p \cdot \log t$$

stetig.

Da nun $|\cdot| : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow (0,\infty)$ stetig ist, ist die Komposition

$$(h|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} =)\ f \circ |\cdot|$$

stetig.

$\Longrightarrow$ h ist stetig in jedem Pkt aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Es bleibt zu zeigen, dass h im Pkt 0 stetig ist.

Nun ist $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ stetig, surjektiv, und

$$t \to -\infty \overset{\text{da } p>0}{\Longrightarrow} pt \longrightarrow -\infty \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow \exp(pt) \longrightarrow 0$$

Also $t \to -\infty$

$$\Longrightarrow h(\underbrace{\exp(t)}_{>0}) = \underbrace{\exp(pt)}_{\to 0 \text{ nach } (*)} \cdot t \qquad (\#)$$

und da $p > 0$ und $\exp(\cdot)$ alle Polynome schlägt, gilt (siehe nächste Aufgabe)

$$h(\exp(t)) \longrightarrow 0 = h(0).$$

Darum

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow (0,\infty) \ni |x| \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow t_x := \log|x| \longrightarrow -\infty$$

$$\Longrightarrow h(x) \overset{\text{da } h \text{ symmetrisch konstriert ist.}}{=} h(|x|) = h(\exp(t_x)) \overset{(\#)}{\longrightarrow} 0 = h(0)$$

Darum ist h stetig im Pkt 0 auch. $\square$

2

Üb11 A3 Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$.

a) $x^{-k} \exp(\alpha x)$

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\frac{(\alpha x)^j}{j!}}_{\geq 0,\ \text{da } \alpha > 0 \text{ und solange } x \geq 0} / x^k$$

da alle Summanden ≥ 0

$$\geq \frac{(\alpha x)^{k+1}}{(k+1)!} / x^k \quad \text{solange } x \in (0, \infty)$$

$$= \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} \cdot x$$

$$\longrightarrow \infty \quad \text{als } x \to +\infty.$$

Folglich $\lim_{\mathbb{R} \ni x \to +\infty} x^{-k} \exp(\alpha x)$

$$= \lim_{(0,\infty) \ni x \to +\infty} x^{-k} \exp(\alpha x) = +\infty,$$

w.z.z.w.

b) aus (a) folgt

$$x^k \exp(-\alpha x) = \left(x^{-k} \exp(\alpha x)\right)^{-1} \longrightarrow 0$$

für $(0, \infty) \ni x \longrightarrow +\infty$.

Darum $\lim_{\mathbb{R} \ni x \to +\infty} x^k \exp(-\alpha x)$

$$= \lim_{(0,\infty) \ni x \to +\infty} x^k \exp(-\alpha x) = 0$$

w.z.z.w.

c) Sei $x \in (0, \infty)$. Dann

$$x^k \log(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^k \log(x^{2k})$$

$$= \frac{1}{2k} \sqrt{x^{2k}} \log(x^{2k})$$

$$= \frac{1}{2k} h(x^{2k})$$

Darum $x \to 0^+ \Rightarrow x^{2k} \to 0^+$

$\Rightarrow h(x^{2k}) \to h(0) = 0$

siehe Aufgabe A2(b)

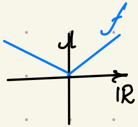
$\Rightarrow x^k \log(x) \to 0,$

w.z.z.w.

3

ÜB11 A4

a) $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto |x| \in (0,\infty)$



Beh. $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ diff}^{\text{bar}} \text{ im } x\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Bew. **($\supseteq$):**

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei $r := |x|$.

Dann $\underbrace{(x-r, x+r)}_{\subseteq \begin{cases} (0,\infty) ; & x>0 \\ (-\infty,0) ; & x<0 \end{cases}} \setminus \{x\} \ni x' \longrightarrow x$ per Wahl von r

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \begin{cases} \frac{x'-x}{x'-x} & ; x>0 \\ \frac{(-x')-(-x)}{x'-x} & ; x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & : x>0 \\ 1 & : x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \longrightarrow \begin{cases} -1 & : x>0 \\ 1 & : x<0 \end{cases}$$

Darum ist f diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x mit

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & : x>0 \\ 1 & : x<0 \end{cases}$$

($\subseteq$): Sei $x = 0$. **Z:** f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt 0.

Der Skizze links entnehmen wir, dass dies zustande kommt, weil Linksableitung $\neq$ Rechtsableitung. Das zeigen wir formal:

- $(\overset{=0}{x}, \infty) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{x'-0}{x'-0} = 1 \longrightarrow 1.$$

Also $\lim\limits_{x' \to x^+} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ ex. und $= +1$.

- $(-\infty, \overset{=0}{x}) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{(-x')-0}{x'-0} = -1 \longrightarrow -1.$$

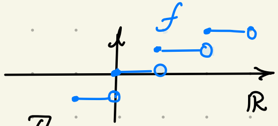
Also $\lim\limits_{x \to x^+} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ ex. und $= -1$.

ungleich

Darum ex. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ nicht.
D.h. f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt 0. $\square$

4

ÜB11 A4...



b) $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$

Beh. $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ diff}^{\text{bar}} \text{ im } x\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

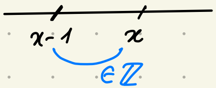
Bew. (⊇): Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$

Dann $\underbrace{(\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1) \setminus \{x\} \ni x'}_{\Rightarrow f(x') = \lfloor x \rfloor = f(x)} \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = 0 \longrightarrow 0$$

Darum ist f diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x mit $f'(x) = 0$.

(⊆): Sei $x \in \mathbb{Z}$.



Dann $\underbrace{(x-1, x) \ni x'}_{\Rightarrow f(x') = x - 1 = f(x) - 1} \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{1}{x' - x} \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x' \to x^-} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ ex. nicht in } \mathbb{R}$$

Darum ist f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x. □

c) $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto \operatorname{sgn}(x) \in \{0, \pm 1\}$ 5

Beh. $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ diff}^{\text{bar}} \text{ im } x\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bew. (⊇): Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setze $r := |x| > 0$.

Dann $\underbrace{(x - r, x + r) \setminus \{x\} \ni x'}_{\subseteq \begin{cases} (0, \infty) & : x > 0 \\ (-\infty, 0) & : x < 0 \end{cases}} \longrightarrow x$ per Wahl von r

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \begin{cases} \frac{(+1) - (+1)}{x' - x} & : x > 0 \\ \frac{(-1) - (-1)}{x' - x} & : x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = 0 \longrightarrow 0$$

Darum ist f diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x mit $f'(x) = 0$

(⊆): Sei $x = 0$

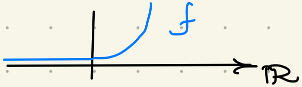
Dann $\underbrace{(0, 1) \ni x'}_{\Rightarrow f(x') = +1} \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \frac{1 - 0}{x' - x} \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x' \to x^-} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \text{ ex. nicht in } \mathbb{R}$$

Darum ist f nicht diff$^{\text{bar}}$ im Pkt x. □

ÜB11 A4...



d) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$

Beh. f ist überall diff$^{\text{bar}}$ mit
$f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2x & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$

Beweis. Auf $(0,\infty)$:
Sei $x \in (0,\infty)$ beliebig.
Z. $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \longrightarrow 2x$ für $x' \in \mathbb{R}\setminus\{x\}$ mit $x' \longrightarrow x$.

Da $x > 0$ können wir o.E. $x' \longrightarrow x$ innerhalb $(0,\infty)$ untersuchen. Es gilt:
$(0,\infty) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Longrightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{x'^2 - x^2}{x'-x} = x' + x \longrightarrow x + x = 2x.$$

w.z.z.w.

6

Auf $(-\infty,0)$: Sei $x \in (-\infty,0)$ beliebig.
Z: $\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \longrightarrow 0$ für $x' \in \mathbb{R}\setminus\{x\}$ mit $x' \longrightarrow x$.

Da $x < 0$ können wir o.E. $x' \longrightarrow x$ innerhalb $(-\infty,0)$ untersuchen. Es gilt:
$(-\infty,0) \ni x' \longrightarrow x$

$$\Longrightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \frac{0-0}{x'-x} = 0 \longrightarrow 0.$$

w.z.z.w.

Im Pkt 0: Sei $x = 0$. Dann
$\mathbb{R}\setminus\{x\} \ni x' \longrightarrow x$

$$\Longrightarrow \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \begin{cases} \frac{x'^2-0}{x'-0} & : x' > 0 \\ \frac{0-0}{x'-0} & : x' < 0 \end{cases}$$

(der Fall $x'=0$ ist ausgeschlossen)

$$= \begin{cases} x' & : x' > 0 \\ 0 & : x' < 0 \end{cases}$$

$$= \max\{0, x'\} \longrightarrow 0$$

Darum $\lim_{x' \to x} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$ ex. und $= 0$

w.z.z.w. $\square$

ÜB11 Z1.

Zu finden: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

i) f diff^bar im Pkt 0

ii) f nicht stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Bsp. aus ÜG: $f: x \mapsto x^2 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$

Differenzierbarkeit im Pkt 0:

Es gilt $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni x \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{x^2-0}{x-0} \to x & : x \in \mathbb{Q} \\ \frac{0-0}{x-0} \to 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$= x \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| = |x| \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)}_{=0 \text{ od. } 1}$$

$$\leq |x| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \longrightarrow 0$$

Also ist f diff^bar im Pkt 0 mit $f'(0) = 0$.

Unstetigkeit auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

7

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig.

Fall 1 $x \in \mathbb{Q}$.

sonst $\sqrt{2} = 2^n \cdot (x + \frac{\sqrt{2}}{2^n} - x)$ $\in \mathbb{Q}$ — Widerspruch!

Dann $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{2^n} \notin \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}$

und $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, während (per Konstr.)

da $x \neq 0$ — da $x \in \mathbb{Q}$

$$f(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq x^2 = f(x),$$

sodass f im Pkt x nicht stetig ist.

Fall 2 $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ **dicht** ist, existiert eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit

(*) $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Andererseits gilt

wegen (*) + Stetigkeit von $t \mapsto t^2$ — da $x \neq 0$

$$f(q_n) = \boxed{q_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2} \neq 0 = f(x)$$

da $x \notin \mathbb{Q}$

Darum ist f im Pkt x nicht stetig.

In allen Fällen ist f im Pkt x nicht stetig.

Daher erfüllt f (i) + (ii).

ÜB11 Z2

Behauptung. $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis.

Nebenrechnung:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right|$$

$$= \frac{|y^2 - x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} \qquad \leq \frac{1}{1+0^2} = 1$$

wird unser „δ" sein

$$= |y-x| \cdot \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\leq |y-x| \cdot \left(\frac{|x|}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} + \frac{|y|}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$\leq |y-x| \cdot (h(|x|) + h(|y|)),$$

wobei $h: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : t \longmapsto \frac{t}{1+t^2}$.

Darum reicht es aus zu zeigen, dass h nach oben beschränkt ist.

8

(Obere) Schranke von h:

Sei also $t \in [0, \infty)$ beliebig.

Dann $0 \leq (1-t)^2 = 1 + t^2 - 2t$

$$\Longrightarrow \quad t \leq \frac{1}{2} \underbrace{(1+t^2)}_{\geq 1 > 0}$$

$$\Longrightarrow (0 \leq)\ h(t) = \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Wir führen diese Beobachtungen jetzt alle zusammen:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Sei $\delta := \varepsilon$.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann $|x-y| < \delta$

siehe Nebenrechnung links

$$\Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq |y-x| \cdot \underbrace{(h(|x|) + h(|y|))}_{\text{s.o., } \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$$

$$\leq |y-x| \cdot 1$$

$$< \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

D.h. f ist gleichmäßig stetig.