

Alna I, Woche 12. Übung

13. Januar 2022

Agenda

- Orga
 - Probeklausur
 - übrige Wochen
 - üg Anmerkungen

- ÜB10 ✓

- ÜB11 ✓

ÜB 10 A1.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Setze $\delta := \underline{\varepsilon}$

Für $x, x' \in \mathbb{R}$

$$|x - x'| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')|$$

$$= |x - x'| < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Also, $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x, x' \in (0, 1): |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

D.h. f ist gleichmäßig stetig

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$

Behauptung. f ist nicht gl. stetig.

Beweis. Angenommen, f sei gl. stetig.

Dann für $\varepsilon := 1$ existiert ein $\delta_1 > 0$,
so dass

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}: |x - x'| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon (*)$$

Seien nun

$$x := \max\left\{0, \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\delta_1} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$x' := x + \frac{\delta_1}{2}$$

$$\text{Dann } |x - x'| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1,$$

sodass wegen $(*)$ $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gilt.

$$\Rightarrow \frac{\delta_1}{2} |x + x'| = |x - x'| \cdot |x + x'|$$

$$= |x^2 - x'^2| = |f(x) - f(x')| < 1$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{\delta_1}{2} = x + x' \quad |x + x'| < \frac{2}{\delta_1}$$

da $x \geq 0$ und $x' > x \geq 0$,
sodass $x + x' > 0$ gilt.

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{2}\right)$$

Widerspricht Wahl von x !

Darum ist die Annahme falsch.
Also ist f nicht gl. stetig. □

$$c) f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$

Dann für $x, x' \in (0,1)$

$$|x - x'| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')|$$

$$= |x^2 - x'^2|$$

$$= \underbrace{|x + x'|}_{\geq 0} \underbrace{|x - x'|}_{< \delta}$$

$$< \underbrace{(x + x') \cdot \delta}_{< 2 \cdot \delta = \varepsilon}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

hier Vorsichtig sein! Wenn Definitionstereich $[0,1]$ wäre, hätten wir hier \leq . Dann wähle bspw. $\delta := \varepsilon/4$ statt $\delta := \varepsilon/2$.

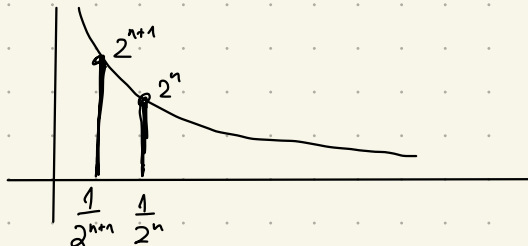
Also, $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x, x' \in (0,1): |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

D.h. f ist gleichmäßig stetig.

$$d) f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

Beobachtung Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

- $\left| \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^{n+1}}$
- $\left| f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{1}{2^n}\right) \right| = |2^{n+1} - 2^n| = 2^n$



Sei nun $\varepsilon := 1 > 0$. Angenommen, es gebe $\delta > 0$ s. d.

$$\forall x, x' \in (0,1): |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Dann wähle $n \in \mathbb{N}$ groß, so dass

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \delta \text{ und } 2^n > \varepsilon$$

Dann für $x := \frac{1}{2^n} \in (0,1)$ und $x' := \frac{1}{2^{n+1}} \in (0,1)$ gelten

- $|x - x'| = \frac{1}{2^{n+1}} < \delta$; aber
- $|f(x) - f(x')| = 2^n > \varepsilon$.

Widerspruch!

Also kann f nicht gl. stetig sein.

ÜB 10 A2

Es sei $N: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$N(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & : x = \frac{p}{q} \text{ mit} \\ & p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixiert.

Behauptung: f ist stetig im Pkt x .

Beweis Beobachte zunächst, dass für $n \in \mathbb{N}$:

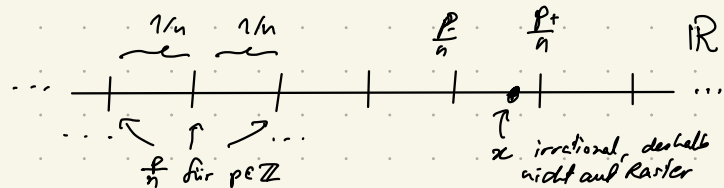
Da x irrational, so gilt

$$d_n := \min \left\{ \left| \frac{p}{n} - x \right| \mid p \in \mathbb{Z} \right\} > 0,$$

$$= \min \left\{ \left| \frac{p_-}{n} - x \right|, \left| \frac{p_+}{n} - x \right| \right\} > 0,$$

wobei $p_- = [nx]$; $p_+ = [nx] + 1$.

Bildlich Darstellung:



Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ groß mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (*)
Setze $\delta := \min \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

Sei $x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x' - x| < \delta$.

Fall 1. $x' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dann $|f(x') - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Fall 2. $x' \in \mathbb{Q}$.

Seien $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd
mit $\frac{p}{q} = x'$

Falls $q \in \{1, 2, \dots, n\}$, so gilt

$$d_q \geq \delta > |x' - x| = \left| \frac{p}{q} - x \right|,$$

was aber die Minimalität von d_q
widerspricht!

Darum muss $q > n$ gelten (**)

$$\Rightarrow |f(x') - f(x)| = \left| \frac{1}{q} - 0 \right| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Darum $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

D.h. f stetig im Punkt x . □

ÜB10 A3

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ nicht leer. Setze

$$d_A: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty); \quad z \mapsto \inf_{w \in A} |z-w|$$

Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\forall a \in A: d_A(z) \leq |z-a| \leq |z-z'| + |z'-a|$$

wegen Inf-Definition

$$\Rightarrow \forall a \in A: |z'-a| \geq d_A(z) - |z-z'|$$

$\Rightarrow \{|z'-a| \mid a \in A\}$ beschr. nach unten durch $d_A(z) - |z-z'|$

Def. von Inf

$$\Rightarrow d_A(z') = \inf \{|z'-a| \mid a \in A\}$$

$$\geq d_A(z) - |z-z'|$$

$$\Rightarrow d_A(z) - d_A(z') \leq |z-z'|$$

Analog lässt sich argumentieren, dass $d_A(z') - d_A(z) \leq |z'-z| = |z-z'|$.

$$\begin{aligned} \text{Daher } |d_A(z) - d_A(z')| &= \max \{d_A(z) - d_A(z'), d_A(z') - d_A(z)\} \\ &\leq |z-z'|. \end{aligned}$$

Da dies für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt, ist d_A Lipschitzstetig mit Konstante 1.

ÜB 10 A3

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. *Angenommen*,

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

sei Lipschitzstetig.

Dann existiert ein $C > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in [0, \infty) : |f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$$

[einfacher Weg]:

$$\Rightarrow \forall x \in [0, \infty) : x^{1/n} \leq Cx$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in [0, \infty) : y \leq Cy^n$$

da $y \in [0, \infty) \mapsto y^n \in [0, \infty)$ surj. ist
 " " " " wohldef. ist

$$\Leftrightarrow \forall y \in [0, \infty) : y^{n-1} \geq C$$

brauchen hier das

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0, \infty) : x \geq C$$

da $y \in [0, \infty) \mapsto y^{n-1} \in [0, \infty)$ surj. ist.
 da " " " " wohldef. ist.

$$\Leftrightarrow [0, \infty) \subseteq [C, \infty)$$

Dies ist ein Widerspruch, da $C > 0$ und $\frac{C}{2} \in [0, \infty)$ aber $\frac{C}{2} \notin [C, \infty)$, da $\frac{C}{2} < C$.

Darum ist f nicht Lipschitzstetig.

Bemerkung

$$\Leftrightarrow \forall y, y' \in [0, \infty) : |y - y'| \leq C \cdot |y^n - y'^n|$$

$$= C \cdot |y - y'| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y^k y'^{n-1-k}$$

Idee: wähle $y_i, y'_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$
 mit $y \neq y'$
 z.B. $y_i = 2^{-i}, y'_i = 3^{-i}$

$$\text{Dann } 0 < C^{-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} y_i^k y'_i^{n-1-k} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} 0^k 0^{n-k} = 0$$

Also $0 < C^{-1} \leq 0$ (warum folgt dies?)

Widerspruch!

ÜB 10 Z1.

Betrachte die Bedingungen auf einer Fkt

$$E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(P1) E stetig

(P2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: E(x+y) = E(x)E(y)$

Beobachtungen

löst sich
per Ind.
beweisen

1) $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}: E(n \cdot x) = E(x)^n$

2) $\forall x \in \mathbb{R}: E(x) = E(2 \cdot \frac{x}{2}) = E(\frac{x}{2})^2 \geq 0$

Darum $\text{rg}(E) \subseteq [0, \infty)$.

3) $E(0) = E(0+0) = E(0)^2$

$$\Rightarrow E(0) \cdot (E(0) - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E(0) = 0 \text{ oder } 1.}$$

wenn $E(0) = 0$, so gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}: E(x) = E(0+x) = E(0)E(x) = 0 \cdot E(x) = 0$$

d.h. $E \equiv 0$ überall. \leadsto "trivialer Fall"

4) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt im nicht trivialen Falle:

$$1 = E(0) = E(-x+x) = E(-x)E(x)$$

$$\Rightarrow E(-x) = E(x)^{-1} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

insbesondere $E(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

5) aus 1) erhält man

5a) für $n \in \mathbb{N}$:

$$E(1) = E(n \cdot \frac{1}{n}) = E(\frac{1}{n})^n$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} E(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{E(1)} \quad \text{"positive n-te Wurzel"}$$

5b) für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$E(\frac{m}{n}) = E(m \cdot \frac{1}{n})$$

$$\stackrel{(1)}{=} E(\frac{1}{n})^m \stackrel{(5a)}{=} (\sqrt[n]{E(1)})^m = E(1)^{m/n}$$

5c) für $m, n \in \mathbb{N}$, im nicht trivialen Falle

$$E(-\frac{m}{n}) \stackrel{(4)}{=} E(\frac{m}{n})^{-1} \stackrel{(5b)}{=} (E(1)^{m/n})^{-1} = E(1)^{-m/n}$$

$$E(0) = 1 = \underbrace{E(1)}_{>0}^0$$

Aus (3-5) folgt

entweder $E \equiv 0$ überall

oder $E(1) > 0$ und $\forall r \in \mathbb{Q}: E(r) = E(1)^r$.

Seien nun $E, E' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
beliebi

Angenommen, $E(1) = E'(1)$.
Dann

Fall 1. $E(1) = E'(1) = 0$

Dann $E \equiv 0$ überall
und $E' \equiv 0$ überall.
Also $E = E'$.

Fall 2. $E(1) = E'(1) \neq 0$.

Dann $\forall r \in \mathbb{Q} : E(r) = E(1)^r = E'(1)^r = E'(r)$.

Also

$\Sigma := \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) - E'(x) = 0\} \supseteq \mathbb{Q}$

Aus $\mathbb{Q} \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{R}$ folgt

$\mathbb{R} \stackrel{!}{=} \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}$.

da \mathbb{Q} dichte
Teilmenge von \mathbb{R} .

Also $\overline{\Sigma} = \mathbb{R}$.

Setze $f := E - E' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Dann ist f stetig und damit ist

$$\Sigma = f^{-1}[\{0\}]$$

abgeschlossen.

$$\Rightarrow \Sigma = \overline{\Sigma} = \mathbb{R}$$

\Rightarrow per Konstr. von Σ gilt
 $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) = E'(x)$
D.h. $E = E'$.

Fall 2.

In allen Fällen gilt also

$$E(1) = E'(1) \Rightarrow E = E'$$

Darum ist jede Fkt $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
die P1 + P2 erfüllt durch $E(1)$
eindeutig festgelegt.