Ana I, Woche 2 Übung

21. Okt 2021

Blatt 0 Aufgabe 3

<u>Beh.</u> Seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$.

Dann (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), wobei

(i) f bijektiv

(ii) ex. $g: Y \to X$

$$\underbrace{f \circ g = id_X}_{*} \quad \text{und} \quad \underbrace{g \circ f = id_Y}_{(**)}$$

<u>Beweis.</u>

<u>((i) ⇒ (ii))</u> Sei f bijektiv.

Z: Ein g existiert, das $(*)$ + $(**)$ erfüllt.

> Setze für jedes $y \in Y$
> $g(y) :=$ <u>das</u> eindeutige $x \in X$ mit $f(x) = y$.

hier haben wir die Annahme gebraucht.

Z_1: g wohldefiniert:

g ordnet jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ zu, weil f surjektiv und injektiv ist.

Z_2: <u>Zu $(*)$</u>: Sei $y \in Y$ beliebig. Dann **per Konstr.** gilt $g(y) =$ dasjenige $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Also $f(g(y)) = f(x) = g(y)$.

Da $y \in Y$ beliebig gewählt wurde, gilt $(*)$.

Zu $(**)$ sei $x \in X$ dann

...

also gilt $g(f(x)) = x$. Also gilt $(**)$.

<u>(ii) ⇒ (i)</u> Es existiere ein $g: Y \to X$ mit $(*)$ und $(**)$.

Z: f ist bijektiv, d.h. <u>inj</u> + <u>surj</u>.

<u>Zur Inj.</u>: Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig.

Wenn $\underline{f(x_1) = f(x_2)}$,

dann
$$x_1 = id_X(x_1) \overset{(**)}{=} g(\underline{f(x_1)}) = g(\underline{f(x_2)}) \overset{(**)}{=} id_X(x_2) = x_2$$

Darum ist f injektiv.

Zur Surj. von f:

Sei $y \in Y$ beliebig

Zu finden: ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Setze $x := g(y)$ (was ja in X liegt.

$$f(x) = f(g(y)) \overset{(*)}{=} id_Y(y) = y.$$

Darum ist f surjektiv

Darum ist f bijektiv.

$\square$ (Behauptung)

Rekursion; Beispiel

(nicht in Übung besprochen)

- $n! = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

$$V_n : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$: g \longmapsto n \cdot g(n)$$

$$f(1) := 1 \;;\; f(v(n)) = V_n(f|_{A_n}) = n \cdot f(n)$$

- $\binom{n}{k}$ lässt sich auf zwei Weisen definieren:

$n, k \in \mathbb{N}_0$
$k \leq n$

<u>Methode 1</u> $\binom{n}{k} := \#\{A \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \mid \#A = k\}$

(kombinatorische Definition)

<u>Methode 2</u> $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Per vollst. Ind. lässt sich zeigen, dass beide Ansätze übereinstimmen.