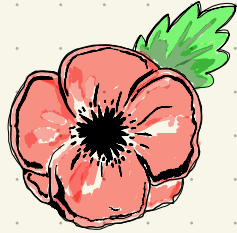


Ana I, Woche 5 Übung

11. Nov 2021



Agenda

Orga: - Takt:

ÜB2 + ÜB4

ODER

ÜB3 + ÜB4

diese Woche

- Masterlösungen??

ÜB2 (A3) od. ÜB3 (A1-3)

Zu ÜB4

- Begriffe ✓
- sup eindeutig (wenn \exists) ✓
- $\sup c \cdot M = c \sup M$ ✓
- ↳ - Ansatz \exists -Ansatz
- $\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$ wenn ...

(K, \leq) totale Ordnungsrel.

Seien $M \subseteq K$ und $s \in K$

Dann

$$\sup M = s$$

gdw. 1) s o. Schr. von M

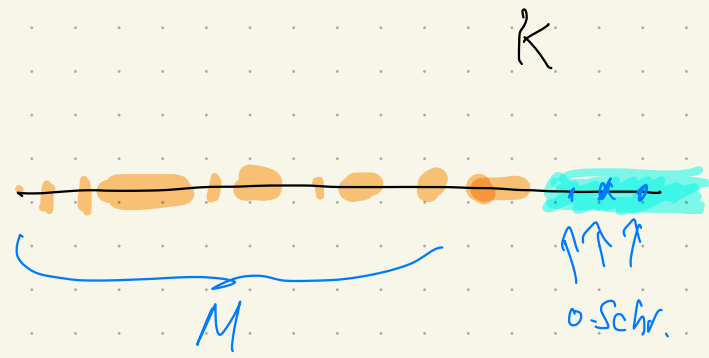
d.h. $\forall x \in M: s \geq x$

2) s minimal unter allen o. Schr. von M

d.h. $\forall s' \in K:$

wenn s' o. Schr. von M

dann $s \leq s'$



die Menge aller o. Schr. von M ist entweder

- 1) \emptyset
 - 2) $[a, \infty)$ $a \in K$
 - 3) (a, ∞) $a \in \text{?}$
- K

Lemma 1

Seien (K, \leq) totale OR

$M \subseteq K$ und $s \in K$

Dann gilt
 $\sup M = s$

\Leftrightarrow 1) s o. Schr.
von M

2) für alle $s' \in K$
wenn $s' < s$,
dann $\exists m \in M$:
 $s' < m$ ~~§§~~.

Lemma 2

Seien K ein angeordneter
Körper, $M \subseteq K$, $s \in K$.

Dann gilt
 $\sup M = s$

\Leftrightarrow 1) s o. Schr. von M

2) für alle $\varepsilon \in K^+$
 $\exists m \in M$:
 $s - \varepsilon < m$

Definition Sei K eine
(totale) OR. Dann heißt
 K **ordnungsvollst.**

(od. Dedekind-vollst.)

genauer dann, wenn

$$\forall M \subseteq K.$$

M hat eine o. Schr.

$$\Rightarrow \sup M \text{ ex. in } K.$$

Lemma 3 K ordnungsvollst.

gdw. $\forall M \subseteq K$

M hat u. Schr.

$$\Leftrightarrow \inf M \text{ ex. in } K$$

Bsp.

für $M = \emptyset$ ist alles in K
eine o. Schr. von M .

\Leftrightarrow ex. $\sup M$ in K
gdw. $\min K$ existiert
(und dann $\sup M = \min K$)

für $M = K$ gilt

$$\{\text{o. Schr. von } M\} = \{\max K\}$$

wenn \max
ex.

od. sonst \emptyset

\Rightarrow ex. $\sup K$ in K

gdw. $\max K$ existiert
(und dann gilt $\sup M = \max K$)

Beh. 4. Sei K angeordneter Körper, $M \subseteq K$, $c \in K^+$.

$$(c > 0)$$

Angenommen A1. K sei ordnungsvollst.

A2. M habe eine o. Schr.

Dann gelten

1) $c \cdot M$ hat eine o. Schr.
($= \{c \cdot x \mid x \in M\}$)

2) $\sup c \cdot M = c \cdot \sup M$

Beweis. Zu 1: Sei s eine

o. Schr. von M (ea. wegen A2)

Dann

$$\stackrel{c > 0}{\Rightarrow} \forall m \in M: m \leq s$$

$$\Rightarrow \forall m \in c \cdot M: cm \leq cs$$

$$\Rightarrow \forall x \in c \cdot M: x \leq c \cdot s$$

d.h. $c \cdot s$ o. Schr. von $c \cdot M$

m. a. W. $c \cdot M$ besitzt eine o. Schr.

Da K ordnungsvollst ist und $M, c \cdot M$ o. Schr. besitzen,

existieren $\sup M =: s_1$

$$\sup c \cdot M =: s_2$$

Zu 2: zu zeigen: $s_2 = c \cdot s_1$

Nebenargument

Sei $s \in K$ beliebig.

s ist o. Schr. von M

$$\Leftrightarrow \forall x \in M: x \leq s$$

$$\stackrel{c > 0}{\Leftrightarrow} \forall x \in M: c \cdot x \leq c \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in c \cdot M: x \leq c \cdot s$$

$$\Leftrightarrow c \cdot s \text{ ist o. Schr. von } c \cdot M$$

\leq : s_1 ist o. Schr. von M

* $\Rightarrow c s_1$ o. Schr. von $c \cdot M$

$\xrightarrow{\text{sup}}$ $(s_2 =) \sup c M \leq c \cdot s_1$

\geq : $s_2 = c(c^{-1}s_2)$ ist o. Schr. von cM

* $\Rightarrow c^{-1}s_2$ ist o. Schr. von M

$\xrightarrow{\text{sup}}$ $(s_1 =) \sup M \leq c^{-1}s_2$

$\xrightarrow{c > 0}$ $\Rightarrow c \cdot s_1 \leq c \cdot c^{-1}s_2 = s_2$

Also gilt $s_2 = c \cdot s_1$ \square

Ausatz 2 (von 2)

Wir zeigen dass

2.1) $c \cdot s_1$ o. Schr. von $c \cdot M$

2.2) für alle $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$
ex. $x \in cM$ s.d.

$$c \cdot s_1 - \varepsilon < x$$

woraus sich ergeben wird, dass
 $c \cdot s_1 = \sup c \cdot M (= s_2)$.

Zu 2.1: siehe Argument für 1).

Zu 2.2:

weil $\varepsilon > 0$

Sei $\varepsilon \in K^+$ beliebig.

Dann ist $\varepsilon' := c^{-1}\varepsilon \in K^+$.

Da $s_1 = \sup M$ ex. $x' \in M$
s.d.

$$s_1 - \varepsilon' < x'$$

Daraus folgt (da $c > 0$)

$$c s_1 - \underbrace{c \varepsilon'}_{= \varepsilon} = c(s_1 - \varepsilon') < \underbrace{c x'}_{x :=}$$

$$\Rightarrow \exists x \in c \cdot M : c s_1 - \varepsilon < x$$

\square

Beh. 5 Sei K ein ^{ordnungsvollständiger} angeordneter

Körper und seien $A, B \subseteq K^+$

(notwendigerweise) (nicht leere) Mengen, die nach oben beschränkt sind. Dann gilt

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Beweis. Da A, B nach oben beschr. sind und K ordnungsvollst. ist, ex.

$\sup A$ und $\sup B$ in K .

$\alpha := \sup A$ $\beta := \sup B$

Da A, B nicht leer und $\subseteq K^+$ sind, müssen $\alpha, \beta > 0$ sein.

Für $x \in A \cdot B$ gilt $x = a \cdot b$ für ein $a \in A$ und $b \in B$. Da $A, B \subseteq K^+$ gilt

$$x = a \cdot b \leq \alpha \cdot b \leq \alpha \cdot \beta$$

da $\alpha \leq \sup A = \alpha$ und $b \geq 0$ da $b \leq \sup B = \beta$ und $\alpha \geq 0$

D.h. $A \cdot B$ ist nach oben beschr., und zwar durch $\alpha \cdot \beta$. *

Da $A \cdot B$ nach oben beschr. ist und K ordnungsvollst. ist, ex.

$$\sup A \cdot B \text{ in } K.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Wegen * wissen wir bereits, dass $\alpha \cdot \beta$ eine o. Schr. von $A \cdot B$ ist, und damit, dass

$$\sup A \cdot B \leq \alpha \cdot \beta$$

Um die \geq -Richtung zu zeigen beobachten per Definition des $\sup A \cdot B$:

(bitte wenden!)

$$\forall a \in A, b \in B: a \cdot b \leq \sup A \cdot B$$

$A \subseteq \mathbb{K}^+$

$$\Rightarrow \forall a \in A: \forall b \in B: b \leq a^{-1} \sup A \cdot B$$

Def: $\sup B$

$$\Rightarrow \forall a \in A: \sup B \leq a^{-1} \cdot \sup A \cdot B$$

„kleinste o. Schr.“

$$\sup B > 0 \Rightarrow \forall a \in A: a \leq (\sup A \cdot B) (\sup B)^{-1}$$

Def: $\sup A$

$$\Rightarrow \sup A \leq (\sup A \cdot B) (\sup B)^{-1}$$

„kleinste o. Schr.“

$\sup B > 0$

$$\Rightarrow \sup A \cdot \sup B \leq \sup (A \cdot B)$$

Also gilt $\sup A \cdot \sup B = \sup A \cdot B$

