Ana I, Woche 7 Übung

25. Nov 2021

Agenda

Orga: Präsenz/online
Abgaben

ÜB4: A1: in ÜG + teilweise hier.
A2: (a) — hier im Dokument
(b)+(c) in ÜG
A4: wurde präsentiert, auch hier.

Zu ÜB6:
- lim sup / lim inf Konzept
- A4 diskutiert (ähnliche Aufgabe)

0

ÜB4 A1

	inf	sup	min	max
M_1	1	$\nexists$	1	$\nexists$
M_2	$\nexists$	1	$\nexists$	$\nexists$
M_3	$-\sqrt{42}$	$+\sqrt{42}$	$\nexists$	$\nexists$

Beobachtung

$M_1 = [1, \infty)$

$M_2 = (-\infty, 1)$

$M_3 = (-\sqrt{42}, \sqrt{42})$

1

M_1 $\quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Inf **Beh.** $\inf M_1 = 1$

Bew. Z: i) 1 ist eine u. Schr.

ii) für alle $a \in \mathbb{R}$ u. Schr. von M_1 gilt $a \leq 1$.

Zu i) Sei $x \in M_1$.

Per Konstr. gilt $x \geq 1$.

$\Rightarrow \forall x \in M_1 : x \geq 1$

$\Rightarrow$ 1 u. Schr von M_1.

Zu ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ eine u. Schr. von M_1.

(indirekter Ansatz)

Angenommen, $a \nleq 1$.

Dann $a > 1$

Dann $\frac{1+a}{2}$ ist in M_1

aber $\frac{1+a}{2} < a$

Das widerspricht *.

* (direkter Ansatz)

$1 \in M_1$.

Also $a \leq 1$, weil a eine u. Schr. ist.

i) + ii) $\Rightarrow \inf M_1 = 1$.

2

Min   Min ex. $\Leftrightarrow$ inf ex. und inf in Menge

$$\inf M_1 = 1 \in M_1 \Longrightarrow \min M_1 \text{ existiert und } \min M_1 = 1.$$

Sup **Beh.** $\sup M_1$ ex. nicht

Bew. Angenommen, $s := \sup M_1$ existiere.

Betrachte $s' := \max\{s+1, 1\}$.

Dann $s' \geq 1 \Rightarrow s' \in M_1$.

$\Rightarrow s \overset{\text{o. Schr.}}{\geq} s' \overset{\text{Konstr.}}{\geq} s+1$

$\Rightarrow s > s$ ↯

Widerspruch. Darum ex. $\sup M_1$ nicht.

Max $\max M_1$ ex. nicht, sonst würde $\sup M_1$ existieren (und gleich $\max M_1$) sein.

M_2 $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Sup **Beh** $\sup M_2 = 1$.

Bew

o. Schr.: $\forall x \in M_2 : x < 1$

$\Rightarrow 1$ o. Schr. von M_2

kleinste o. Schr.: Sei $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke. Angenommen, $b < 1$.

Dann $b \in M_2$.

Betrachte $b < \frac{1+b}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1+b}{2} \in M_2$

Darum $\frac{1+b}{2} < b$ ↯.

ε - Ansatz

- o. Schr: ✓

- Sei $\varepsilon > 0$. Z: $\exists x \in M_2$:

$$1 - \varepsilon < x$$

Wir haben $1 - \varepsilon < \underbrace{1 - \frac{\varepsilon}{2}}_{x :=} < 1$

Darum liegt

x in M_2.

Also $\exists x \in M_2$: $1 - \varepsilon < x$

(nämlich $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$)

Durch die Charakterisierung folgt

$\sup M_2 = 1$.

Max $1 \not< 1$, also

$1 \notin M_2$

Darum liegt das Supremum von M_2 nicht in M_2, sodass das Maximum nicht existiert.

ÜB4 A2

a) **Beh.** Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt.
Dann $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Bew.

Fall 1 $A = \emptyset$. Dann $A+B = \emptyset$.
Also $\inf(A+B) = \inf \emptyset = \infty$
$\inf A + \underbrace{\inf B}_{\in (-\infty, \infty]} = \inf \emptyset + \inf B = \infty$

also gilt $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Fall 2 $B = \emptyset$. Analog zu Fall 1 gilt
$\inf(A+B) = \infty = \inf A + \inf B$.

Fall 3 A, B nicht leer. Da A bzw. B nach unten beschränkt sind (durch, sagen wir, α bzw. β in $\mathbb{R}$), existieren $\inf A$, $\inf B$.
Für $a \in A$, $b \in B$ gilt $a + b \geq \alpha + \beta$.
Darum ist $A+B$ (nicht leer und) nach unten beschränkt, und zwar durch $\alpha+\beta$.
Oben hätten wir nun $\alpha := \inf A$ und $\beta := \inf B$ wählen können, sodass, da $\alpha+\beta$ eine u. Schr. von $A+B$ ist, $\inf(A+B) \geq \alpha + \beta = \inf A + \inf B$

gilt. Es bleibt, die andere Richtung ($\leq$) zu zeigen.

Ansatz 1 (direkt)

Per Definition des Inf von $A+B$ gilt nun
$\forall a \in A : \forall b \in B : \quad \inf(A+B) \leq a + b$

$\Longrightarrow \forall a \in A : \forall b \in B : -a + \inf(A+B) \leq b$

$\Longrightarrow \forall a \in A : -a + \inf(A+B)$ u. Schr. von B

$\overset{\text{Def}^{\text{n}} \inf B}{\Longrightarrow} \forall a \in A : \quad -a + \underbrace{\inf(A+B)}_{\text{existiert in } \mathbb{R}} \leq \underbrace{\inf B}_{\text{existiert in } \mathbb{R}}$

$\Longrightarrow \forall a \in A : \quad \inf(A+B) - \inf B \leq a$

$\overset{\text{Def}^{\text{n}} \inf A}{\Longrightarrow} \inf(A+B) - \inf(B) \leq \inf(A)$

$\Longrightarrow \inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B)$

Ansatz 2 (indirekt)

Ansatz 3 (ε-Argument)

ÜB4 A4

Sei $M := \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{Q}$.

Behauptung A4. Innerhalb $(\mathbb{Q}, <)$ existiert kein Supremum von M.

Struktur des Arguments.

Schritt 1 Zeige: falls sup M doch in $\mathbb{Q}$ existiert, dann gilt für
$s := \sup M \in \mathbb{Q}$,
dann $s^2 = 2$.

Schritt 2 Zeige: es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. (✓ gilt, weil $\sqrt{2}$ irrational ist.)

Aus Schritten 1+2 folgt, dass kein Supremum von M in $\mathbb{Q}$ existier.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Behauptung in **Schritt 1** gilt. Hierfür gibt es mindestens zwei Ansätze.

Sei also $s \in \mathbb{Q}$ mit $s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{Q}, <)$. **Z**: $s^2 = 2$

6

Beobachte zunächst: $1 \in \mathbb{Q}$ und $1^2 = 1 \leq 2$, also $0 \in M$, also $s \geq 1 > 0$, da s o. Schr. von M ist.

Ansatz 1 Wir zeigen, dass $s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{R}, <)$. Hierfür brauchen wir ein Lemma:

Lemma. Sei $(X, <)$ eine (totale) Ordnungsrelation und $D \subseteq X$ eine ordnungsdichte Teilmenge (z.B. $X = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{Q}$).
Seien $A \subseteq D$ und $\alpha \in D$. Dann
$\alpha = \sup A$ innerhalb $(D, <)$
$\Longrightarrow$ $\alpha = \sup A$ innerhalb $(X, <)$.

Bew Da $\alpha = \sup A$ in $(D, <)$, so ist innerhalb $(D, <)$ α eine o. Schr. von A. (Δ)
Dies bleibt innerhalb $(X, <)$ wahr.

Sei nun $\alpha' \in X$ mit $\alpha' < \alpha$.
Da D ordnungsdicht in X ist, existiert $\alpha'' \in D$ mit $\alpha' < \alpha'' < \alpha$. *
Da α das Sup innerhalb $(D, <)$ von A ist, existiert $x \in A$ mit $\alpha'' < x \leq \alpha$. **
Also gilt $\alpha' < x \leq \alpha$ wegen * + **.

$\Longrightarrow \forall \alpha' \in X : (\alpha' < \alpha \Rightarrow \exists x \in A \text{ mit } \alpha' < x)$ (†)

Aus (Δ) + (†) folgt $\alpha = \sup A$ innerhalb $(X, <)$ □ (Lemma)

Der Umkehrschluss ist trivialerweise auch wahr. Aber wir benötigen lediglich die $\Rightarrow$-Richtung für unsere Zwecke.

Da $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R},<)$ dicht ist und $M \subseteq \mathbb{Q}$ und $s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{Q},<)$ dem **Lemma** zufolge gilt

(††) $\quad s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{R},<)$.

Da wir wissen, dass $s > 0$, folgt aus (††), dass

berechnet in $(\mathbb{R},<)$
$$\left\{\begin{aligned} s &= \sup \{q \in M \mid q \geq 0\} \\ &= \sup \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q,\ q^2 \leq 2\} \\ &= \sup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \in [0,\sqrt{2}]\} \\ &= \sup\, [0,\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \end{aligned}\right.$$

Da $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R},<)$ dicht ist, gilt $\sup \mathcal{I} = \sup \mathcal{I} \cap \mathbb{Q}$ für alle Intervalle $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ von positiver Länge.
(weiteres **Lemma** nötig!)

Darum $s = \sup\, [0,\sqrt{2}] = \sqrt{2}$.
Also $s^2 = \sqrt{2}^2 = 2$.

$\square$ (Ansatz I)

Ansatz II Es reicht aus $s^2 < 2$ und $s^2 > 2$ auszuschließen.

Fall 1 $\quad s^2 < 2$. Sei $\overbrace{q := 2 - s^2}^{*} \in \mathbb{Q}^+$.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ mit
1) $\varepsilon \leq 1$
2) $(2s+1)\,\varepsilon \leq \frac{q}{2}$

z. B. $\quad \varepsilon := \min\left\{1, \frac{q}{2(2s+1)}\right\}$ in $\mathbb{Q}^+$, da $s, q \in \mathbb{Q}$ und $q > 0$ und $s > 0$

Setze $s' := s + \varepsilon$.
Dann $s' \in \mathbb{Q}$ und $s' > s$ (da $\varepsilon > 0$).
Es gilt
$$\begin{aligned} s'^2 &= s^2 + 2\varepsilon \cdot s + \varepsilon^2 \\ &\overset{*}{=} 2 - q + \varepsilon \cdot (2s + \varepsilon) \\ &\leq 2 - q + \varepsilon \cdot (2s+1) && \text{da } \varepsilon > 0 \text{ und wegen } 1 \\ &\leq 2 - q + q/2 && \text{wegen } 2 \\ &< 2 \end{aligned}$$

Also $s' \in \mathbb{Q}$ und $s'^2 < 2$.
Also $s' \in M$.
Also $s = \sup M \geq s'$.
Dies ist ein Widerspruch!
Darum ist Fall 1 ausgeschlossen.

8

Fall 2 $s^2 > 2$. Sei $\overbrace{q := s^2 - 2}^{**} \in \mathbb{Q}^+$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ mit **3)** $s - \varepsilon \geq 0$

4) $2s\varepsilon < q$.

Z.B. $\varepsilon := \min\{\underbrace{s}_{>0}, \frac{q}{4s}\}$ in $\mathbb{Q}^+$, da $s, q \in \mathbb{Q}$ und $q > 0$ und $s > 0$

Setze $s' := s - \varepsilon$

Dann $s' \in \mathbb{Q}$ und $0 \leq s' < s$ wegen **3** und da $\varepsilon > 0$.

Da $s = \sup M$ und $s' < s$, existiert ein $q^* \in M$ mit $s' < q^* \leq s$.

Da $s' \geq 0$ gilt auch $q^* \geq 0$.

Da $x \in \mathbb{Q}_0^+ \longmapsto x^2$ monoton ist, folgt

$s'^2 \leq q^{*2}$

$\Longrightarrow s'^2 \leq 2$, da $q^* \in M$ und damit $q^{*2} \leq 2$

$\Longrightarrow (s-\varepsilon)^2 \leq 2 \overset{**}{=} s^2 - q$

$\Longrightarrow s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \leq s^2 - q$

$\Longrightarrow 2s\varepsilon \geq q + \underbrace{\varepsilon^2}_{\text{da } \varepsilon^2 > 0} > q$

Dies ist ein Widerspruch!

Darum ist Fall 2 ausgeschlossen.

Da Fall 1 + Fall 2 ausgeschlossen sind, bleibt nur $s^2 = 2$ übrig.

$\square$ (Ansatz II)

Durch entweder Ansatz I od. II ist die Behauptung in **Schritt 1** unserer Argumentationsstruktur bewiesen.

Also funktioniert die Argumentation, und liefert, dass **Behauptung A4** gilt.

$\square$ (Beh. A4)

Bemerkung. Ansatz II hat den Vorteil, dass wir gar nichts über $\mathbb{R}$ oder $\sqrt{2}$ benötigen oder wissen müssen.

ÜB6 (Hinweise)

Bzgl. **A4.**

- Man kann aus der allgemeinen Aussage in (a) (d.h. „für alle Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ …") die Aussage in (b) erschließen.
  Dafür kann man aus den Folgen in (b) Folgen $(x'_n)_n, (y'_n)_n$ konstruieren, dann (a) anwenden, und die Ausdrücke dann umformen, so dass die Ungleichung in (b) entsteht. Doch wie?

- Aus (a) + (b) kann man durch ein wenig Arbeit (c) erschließen. Wie?

Ähnliche Aufgabe wie (a):

Behauptung. Seien $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Folgen. Dann

$$\underbrace{\liminf_{n\to\infty} x_n + y_n}_{\gamma :=} \geq \underbrace{\liminf_{n\to\infty} x_n}_{\alpha :=} + \underbrace{\liminf_{n\to\infty} y_n}_{\beta :=}$$

solange es nicht der Fall ist, dass $\alpha = +\infty$ und $\beta = -\infty$ oder $\alpha = -\infty$ und $\beta = -\infty$.

Bew. Falls $\gamma = \pm\infty$ und entweder $\alpha = \gamma$ od. $\beta = \gamma$, dann l.S. $= \gamma =$ r.S. Es bleibt also nur die Fälle zu behandeln, bei denen diese Verhältnisse nicht vorliegen. *

Beobachte zunächst

$$\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} (x_k + y_k)}_{=: \gamma_n}$$

$$\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} x_k}_{=: \alpha_n}$$

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} y_k}_{=: \beta_n}$$

Es gilt

$$\forall n\in\mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, \geq n : \; x_k + y_k \geq \alpha_n + \beta_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n + \beta_n \text{ u. Schr. von } \{x_k + y_k \mid k \geq n\}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \gamma_n = \inf\{x_k + y_k \mid k \geq n\} \geq \alpha_n + \beta_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \gamma \geq \gamma_n \geq \alpha_n + \beta_n$$

(wenden)

da $(\alpha_n)_n$, (β_n) monoton steigende Folgen sind:

$$\Rightarrow \forall m,n \in \mathbb{N}: \gamma \geq \alpha_{\max\{m,n\}} + \beta_{\max\{m,n\}} \geq \alpha_m + \beta_n$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: \gamma - \alpha_m \geq \beta_n$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \gamma - \alpha_m \text{ o. Schr. von } \{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \gamma - \alpha_m \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = \beta$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \underbrace{\gamma - \beta} \geq \alpha_m$$

wohldefiniert, weil die Fälle $\infty - \infty$ und $(-\infty) - (-\infty)$ ausgeschlossen wurden (siehe ✱)

$$\Rightarrow \gamma - \beta \text{ eine o. Schr. von } \{\alpha_m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow \gamma - \beta \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \alpha_m = \alpha.$$

$$\Rightarrow \gamma \geq \underbrace{\alpha + \beta}$$

wohldefiniert weil per Voraussetzung $\infty + -\infty$ und $-\infty + \infty$ ausgeschlossen sind.

Darum gilt die Ungleichung $\square$