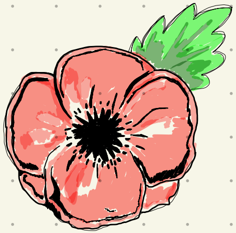
0

Ana I, Woche 5 Übung

11. Nov 2021



Agenda

Orga: – Takt: $\boxed{\text{ÜB2 + ÜB4}}$ ODER $\boxed{\text{ÜB3 + ÜB4}}$ } diese Woche

– Musterlösungen??

ÜB2 (A3) **od.** **ÜB3** (A1–3)

Zu ÜB4

– Begriffe ✓

– Sup eindeutig (wenn $\exists$) ✓

– $\sup c \cdot M = c \sup M$ ✓

$\leq$-Ansatz ε-Ansatz

– $\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$ wenn ...

$(K, \leq)$ totale Ordnungsrel.

Seien $M \subseteq K$ und $s \in K$

Dann

$$\sup M = s$$

gdw. 1) s o. Schr. von M

d.h. $\forall x \in M: s \geq x$

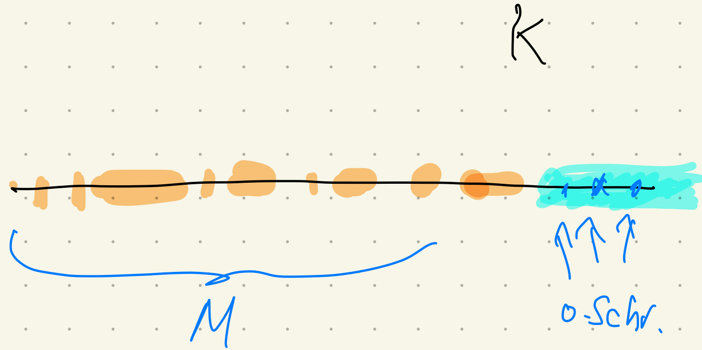
2) s minimal unter allen o. Schr. von M

d.h. $\forall s' \in K$:

wenn s' o. Schr. von M

dann $s \leq s'$

1



die Menge aller o. Schr. von M ist entweder

1) $\emptyset$

2) $[a, \infty)$ $\quad a \in K$

3) (a, ∞) $\quad a \in ??$

$\overline{K}$

Lemma 1

Seien $(K, \leq)$ totale OR
$M \subseteq K$ und $s \in K$

Dann gilt
$\sup M = s$

$\Longleftrightarrow$ 1) s o. Schr von M

2) für alle $s' \in K$
wenn $s' < s$,
dann $\exists m \in M$:
$s' < m \cancel{\leq s}$.

Lemma 2

Seien K ein angeordneter Körper, $M \subseteq K$, $s \in K$.

Dann gilt
$\sup M = s$

$\Longleftrightarrow$ 1) s o. Schr. von M

2) für alle $\varepsilon \in K^+$
$\exists m \in M$:
$s - \varepsilon < m$

Definition Sei K eine (totale) OR. Dann heißt K **ordnungsvollst.** (od. Dedekind-vollst.) genau dann, wenn

$\forall M \subseteq K$:

M hat eine o. Schr. $\Longrightarrow$ $\sup M$ ex. in K.

Lemma 3 K ordnungsvollst. gdw. $\forall M \subseteq K$

M hat u. Schr. $\Rightarrow$ $\inf M$ ex. in K

Bsp.

für $M = \emptyset$ ist alles in K eine o. Schr. von M.

$\Longrightarrow$ ex. $\sup M$ in K

gdw. $\min K$ existiert

(und dann $\sup M = \min K$)

für $M = K$ gilt

$\{\text{o. Schr. von } M\} = \{\max K\}$ wenn Max ex.

od. sonst $\emptyset$

$\Rightarrow$ ex. $\sup K$ in K

gdw. $\max K$ existiert

(und dann gilt $\sup M = \max K$)

Beh. 4. Sei K angeordneter Körper, $M \subseteq K$, $c \in K^+$. $(c>0)$

Angenommen A1. K sei ordnungsvollst.

A2. M habe eine o. Schr.

Dann gelten

1) $c \cdot M$ hat eine o. Schr. $(=\{cx \mid x \in M\})$

2) $\sup c \cdot M = c \cdot \sup M$

Beweis. **Zu 1:** Sei s eine o. Schr von M (ex. wegen A2)

Dann $\forall m \in M: \quad m \leq s$

$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \forall m \in M: \quad cm \leq cs$

$\Longrightarrow \forall x \in c \cdot M: \quad x \leq c \cdot s$

d.h. $c \cdot s$ o. Schr. von $c \cdot M$

$$4$$

m. a. W. $c \cdot M$ besitzt eine o. Schr.

Da K ordnungsvollst ist und M, cM o. Schr. besitzen, existieren

$\sup M =: s_1$

$\sup c \cdot M =: s_2$

Zu 2: zu zeigen: $s_2 = c \cdot s_1$.

Nebenargument

Sei $s \in K$ beliebig.

s ist o. Schr. von M

$\Longleftrightarrow \forall x \in M: \quad x \leq s$

$\overset{c>0}{\Longleftrightarrow} \forall x \in M: \quad cx \leq cs$

$\Longleftrightarrow \forall x \in cM: \quad x \leq cs$

$\Longleftrightarrow cs$ ist o. Schr. von $c \cdot M$

$\leq$: s_1 ist o. Schr. von M

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \quad cs_1 \text{ o. Schr. von } c\cdot M$$

$$\overset{\sup}{\Longrightarrow} \quad (s_2 \Rightarrow) \sup cM \leq c\cdot s_1$$

$\geq$: $s_2 = c(c^{-1}s_2)$ ist o. Schr von cM

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \quad c^{-1}s_2 \text{ ist o. Schr. von } M$$

$$\overset{\sup}{\Longrightarrow} \quad (s_1 \Rightarrow) \sup M \leq c^{-1}s_2$$

$$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \quad c\cdot s_1 \leq c\cdot c^{-1}s_2 = s_2$$

Also gilt $\underline{\sup cM = s_2 = c\cdot s_1 = c\cdot \sup M}$ $\square$

ε-Ansatz (für 2)):

Wir zeigen dass

2.1) $c\cdot s_1$ o. Schr von $c\cdot M$

2.2) für alle $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$ ex. $x \in cM$ s.d.

$$c\cdot s_1 - \varepsilon < x$$

woraus sich ergeben wird, dass

$$(c\cdot \sup M \Rightarrow) c\cdot s_1 = \sup c\cdot M.$$

Zu 2.1: siehe Argument für **1)**.

Zu 2.2:

Sei $\varepsilon \in K^+$ beliebig. $c > 0 \Rightarrow c^{-1} > 0$; $c^{-1}, \varepsilon > 0 \Rightarrow c^{-1}\varepsilon > 0$

Dann ist $\varepsilon' := c^{-1}\varepsilon \in K^+$

Da $s_1 = \sup M$, existiert ein $x' \in M$ s.d.

$$s_1 - \varepsilon' < x'$$

$$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \quad cs_1 - \varepsilon = c\cdot s_1 - c\cdot\varepsilon' = c\cdot(s_1 - \varepsilon') < c\cdot x' =: x, \in c\cdot M$$

$$\Longrightarrow \quad \exists x \in c\cdot M: \; cs_1 - \varepsilon < x.$$

aus **2.1** + **2.2** folgt wie oben erklärt

$$c\cdot \sup M = \sup c\cdot M \qquad \square$$

Beh. 5 Sei K ein ordnungsvollständiger angeordneter Körper und seien $A, B \subseteq K^+$ (notwendigerweise nicht leere) Mengen, die nach oben beschränkt sind. Dann gilt

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Beweis. Da A, B nach oben beschr. sind und K ordnungsvollst. ist, ex. $\underbrace{\sup A}_{\alpha :=}$ und $\underbrace{\sup B}_{\beta :=}$ in K.

Da A, B nicht leer und $\subseteq K^+$ sind, müssen $\alpha, \beta > 0$ sein.

Für $x \in A \cdot B$ gilt $x = a \cdot b$ für ein $a \in A$ und $b \in B$. Da $A, B \subseteq K^+$ gilt

$$x = a \cdot b \underbrace{\leq}_{\substack{\text{da } a \leq \sup A = \alpha \\ \text{und } b \geq 0}} \alpha \cdot b \underbrace{\leq}_{\substack{\text{da } b \leq \sup B = \beta \\ \text{und } \alpha \geq 0}} \alpha \cdot \beta$$

D.h. $A \cdot B$ ist nach oben beschr., und zwar durch $\alpha \cdot \beta$. ✱

6

Da $A \cdot B$ nach oben beschr. ist und K ordnungsvollst. ist, ex. $\sup A \cdot B$ in K.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Wegen ✱ wissen wir bereits, dass $\alpha \cdot \beta$ eine o. Schr. von $A B$ ist, und damit, dass

$$\sup A \cdot B \leq \alpha \cdot \beta = \sup A \cdot \sup B$$

Um die $\geq$-Richtung zu zeigen beobachten per Definition des $\sup A \cdot B$:

(bitte wenden!)

7

$$\forall a \in A, b \in B: \quad a \cdot b \leq \sup A \cdot B$$

$A \subseteq K^+$

$$\Longrightarrow \forall a \in A: \quad \forall b \in B: \quad b \leq a^{-1} \sup A \cdot B$$

Def^{n} $\sup B$

$$\Longrightarrow \forall a \in A: \quad \sup B \leq a^{-1} \cdot \sup AB$$

„kleinste o. Schr."

$\sup B > 0$

$$\Longrightarrow \forall a \in A: \quad a \leq (\sup A \cdot B)(\sup B)^{-1}$$

Def^{n} $\sup A$

$$\Longrightarrow \sup A \leq (\sup A \cdot B)(\sup B)^{-1}$$

„kleinste o. Schr."

$\sup B > 0$

$$\Longrightarrow \sup A \cdot \sup B \leq \sup (A \cdot B)$$

Also gilt $\sup A \cdot \sup B = \sup A \cdot B$

$\square$