Ana I, Woche 11 Übung

6. Januar 2022

A517

Agenda

- **Orga**
  - ☐ Abgabe ÜB 10
  - ☐ Probeklausur
  - ☐ Modus Woche 12
  - ☐ Takt $\{n-1; n+1\} \to \{n; n+1\}$
- ÜB 9
- Fragen zu ÜB 10
- Fragen zu ÜB 7+8 + Anmerkungen von Korrektor
  (lim, $\xrightarrow[n]{}$)

0

1

ÜB9 A1

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

a) **Behauptung.** (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), wobei

(i) $\sum_{n\geq 1} x_{n+1} - x_n$ konv.

(ii) $(x_n)_n$ konv.

Beweis.

Partielle Summen: $S(n) := \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} - x_k$

wegen Teleskopsumme $= x_{n+1} - x_1$

(i) $\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\Longleftrightarrow}$ $(S(n))_n$ konv.

$\Longleftrightarrow$ $(x_{n+1} - \underbrace{x_1}_{\text{„konstant" bzgl. } n})_n$ konv.

Konv. invariant bzgl. Werteversch. $\Longleftrightarrow$ $(x_{n+1})_n$ konv.

$\Longleftrightarrow$ $(x_n)_n$ konv. $\Longleftrightarrow$ (ii)

Konv. invariant bzgl. Indexversch.

$\square$

b) **Behauptung.** Angenommen, $(x_n)_n \subseteq [0,\infty)$.

Dann $\sum_{n\geq 1} x_n$ konv. $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} x_n^2$ konv.

Beweis.

$J := \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n| \geq 1\}$.

$\sum_{n\geq 1} x_n$ konv. $\Longrightarrow$ $(x_n)_n \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow$ ex. $N_1 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq N_1 : \ |x_n| < \underbrace{1}_{\varepsilon}$

$[\Longrightarrow [N_1, \infty)_{\mathbb{N}} \subseteq J]$

Darum für $n \geq N_1$ gilt.

$$S_2(n) := \sum_{k\geq 1} x_k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1-1} x_k^2}_{\alpha_2 :=} + \sum_{k=N_1}^{n} \underbrace{x_k^2}_{\leq x_k}$$

$$\leq \alpha_2 - \alpha_1 + \underbrace{S_1(n)}_{\longrightarrow \sum_{k\geq 1} x_k =: s}$$

Darum $S_2(n) \leq \alpha_2 - \alpha_1 + s$ für alle $n \geq N_1$

$\Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)_n$ monoton wachsend + beschränkt nach oben $\Longrightarrow$ Reihe konv. $\square$

ÜB9 A2

a) $$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} = \left(\underbrace{\frac{n+1}{n-1}}_{\frac{n-1+2}{n-1}}\right)^{-n(n-1)} = \left(\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-n}.$$

$$\sqrt[n]{\cdot} = \Big(\underbrace{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}}_{\to e^2 \neq 0}\Big)^{-1} \xrightarrow[n]{} e^{-2}$$

$$\Longrightarrow \limsup_n |a_n|^{1/n} = e^{-2} \in (0,1)$$

$\sqrt{\ }$-Krit $\Longrightarrow$ Reihe konv. absolut.

b) $$\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n \cdot \underbrace{\left[\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{=: e_n \text{ (mon. } \nearrow)}}{n+1}\right]}_{a_n \in (0,\infty)}$$

(a_n) monoton fallend

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n \quad n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n-1}}$$

$$= \left(\frac{(n+1+1)(n+1-1)}{(n+1)^2}\right)^n = \underbrace{\Big(1-\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\in [0,1)}\Big)^n}_{\in [0,1)}$$

$\Longrightarrow$ $a_{n+1} < a_n$ für alle n

Nullfolge: $e_n \to e$; $\frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow a_n \to e \cdot 0 = 0$

Darum kann man das Leibniz-Krit. anwenden

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n \quad \text{konvergent}$$

$$\left|(-1)^n a_n\right| = a_n = \frac{e_n}{n+1}, \qquad e_n \xrightarrow[n]{} e \neq 0$$

2

Da $e_n \xrightarrow[n]{} e$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n \geq n_0: \quad e_n > e/2. \qquad (*)$$

also $a_n > \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$ für $n \geq n_0$.

Harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{e}{2}\cdot\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n} = \infty$$

Minorantenkrit. Aus $(*)$ + $(**)$ folgt

$$\sum_{n\geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n\geq 1} a_n = \infty$$

Also ist die Reihe nicht absolut konvergent.

c) Wir behaupten, dass die Reihe nicht konvergent ist.

Es gilt: $\sum_{n\geq 1} a_n$ konv $\Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z: $\liminf_{n\to\infty} a_n > 0$.

Es gilt $a_n = \dfrac{n^n\, n^{1/2}}{n^n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n}} = \dfrac{n^{1/2}}{e_{n^2}^{\;1/n}}$ für $n \in \mathbb{N}$

wobei $e_N = (1+1/N)^N$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

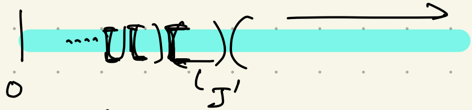
Wir wissen: $(e_N)_{N\geq 1}$ mon. $\nearrow e$

Darum $a_n \geq \dfrac{n^{1/2}}{e^{1/n}} \geq \dfrac{1^{1/2}}{(e^n)^{1/n}} = \dfrac{1}{e}$

Also $\liminf_n a_n \geq \frac{1}{e} > 0$.

Konklusion: Reihe nicht konv (siehe oben).

ÜB9 A3



$$S := \sum_{j\in J} x_j \overset{\text{Defn}}{=} \sup\{ s_E \mid E \subseteq J, E \text{ endlich}\}$$

wobei $s_E := \sum_{j\in E} x_j$ für $E \subseteq J$ endlich.

Ann: $S < \infty$

Beob1 für $E \subseteq J$ endl. gilt

$$S \overset{\sup}{\geq} s_E = \sum_{j\in E} x_j \geq |E| \cdot \min_{j\in E} x_j$$

Beob2 für $E \subseteq J_n := \{ j\in J \mid x_j > \frac{1}{n}\}$ endlich gilt

$$S \overset{\text{Beob 1.}}{\geq} |E| \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad |E| \leq n \cdot |S| \qquad (*)$$

$\Rightarrow \quad |J_n| \leq n|S|$ sonst existiert endl. $E \subseteq J_n$ mit $|E| > n|S|$, was $(*)$ widerspricht.

Daraus wissen wir:

J_n endl. $(\Rightarrow$ abzählbar$)$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt dass

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ abzählbar

Anderseits gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{ j\in J \mid x_j > \tfrac{1}{n}\}$$
$$= \{ j\in J \mid \exists n\in\mathbb{N}: x_j > \tfrac{1}{n}\}$$
$$\overset{\text{Archimed. Prinzip}}{=} \{ j \in J \mid x_j > 0\}$$
$$= J$$

Darum ist J abzählbar. $\square$

ÜB9 A4 (Ansatz ohne Sätze)

Behauptung: Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty);\ x\longmapsto\sqrt[n]{x}$ gleichmäßig stetig

Beweis:

Sei $\varepsilon>0$ beliebig

Setze $\delta := n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1}\cdot\varepsilon > 0$.

Seien $x_1,x_2\in[0,\infty)$ beliebig mit $|x_1-x_2|<\delta$.

Z: $|y_1-y_2|<\varepsilon$, wobei $y_1:=f(x_1)=x_1^{1/n}$, $y_2:=f(x_2)=x_2^{1/n}$.

Fall 1 $\quad 0\le y_1,y_2<\frac{\varepsilon}{2}$.

Dann $|y_2-y_1|\le|y_2|+|y_1|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Also $|y_2-y_1|<\varepsilon$.

Fall 2 $\quad y_1,y_2\ge\frac{\varepsilon}{2}$.

$$n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1}\varepsilon=\delta>|x_2-x_1|=|y_2^n-y_1^n|$$
$$=|y_2-y_1|\cdot\sum_{k=0}^{n-1}y_1^k\,y_2^{n-1-k}$$
$$\ge|y_2-y_1|\cdot n\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1}$$

Also $|y_2-y_1|<\varepsilon$

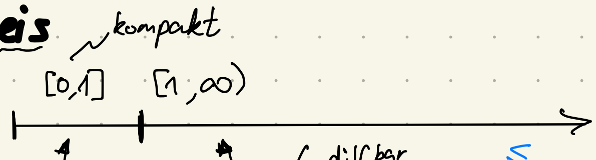
$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:\forall x_1,x_2\in[0,\infty):$
$|x_2-x_1|<\delta\Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

d.h. f ist gleichmäßig stetig. □

ÜB9 A4 (Ansatz mit Sätzen)

4

Beweis



$f|_{[0,1]}$ ist stetig auf einer kompakten Menge

$\Rightarrow f|_{[0,1]}$ gl. stetig

siehe VL

f diffbar

$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ $\le$

$|f'(x)|\le|f'(1)|=\frac{1}{n}$

für alle $x\in[1,\infty)$

$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} f|_{[1,\infty)}$ lipschitzstetig mit Konst. $\frac{1}{n}$

$\Rightarrow f|_{[1,\infty)}$ gl. stetig.

Da 1) $f|_{[0,1]}$ gl. stetig
2) $f|_{[1,\infty)}$ gl. stetig
3) f stetig

folgt, dass f auf $[0,\infty)$ gl. stetig ist. □

(für ausführliche Begr. dieses Schlusses bitte wenden)

Begr. vom letzten Schluss:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Seien $\delta_1, \delta_2 > 0$ s.d.

1) $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$:

$$|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2) $\forall x_1, x_2 \in [1,\infty)$:

$$|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(δ_1, δ_2 existieren, da $f|_{[0,1]}, f|_{[1,\infty)}$ gl. stetig sind)

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Dann für $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gelten:

Fall 1. $x_1, x_2 \in [0,1]$.

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1 - x_2| < \delta_1 \overset{}{\underset{1)}{\Rightarrow}} |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Fall 2. $x_1, x_2 \in [1,\infty)$.

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |x_1 - x_2| < \delta_1 \overset{}{\underset{2)}{\Rightarrow}} |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Fall 3 $x_1 \leq 1 \leq x_2$

Dann $|x_1 - 1| \leq |x_1 - x_2| < \delta \overset{\text{Fall 1}}{\Longrightarrow} |f(x_1) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_2 - 1| \leq |x_1 - x_2| < \delta \overset{\text{Fall 2}}{\Longrightarrow} |f(x_2) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Also $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(1)| + |f(1) - f(x_2)|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

5

Fall 4. $x_2 \leq 1 \leq x_1$.

Analog zu Fall 3 gilt $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0,\infty) : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

d.h. f ist gleichmäßig stetig. □