Ana I, Woche 12 Übung

13. Januar 2022

Agenda

- **Orga**
  - Probeklausur
  - übrige Wochen
  - ÜG Anmerkungen
- **ÜB10** ✓
- **ÜB11** ✓

0

ÜB 10 A1.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Setze $\delta := \underline{\ \varepsilon\ }$

Für $x, x' \in \mathbb{R}$

$|x - x'| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')|$

$= |x - x'| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

Also, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in (0,1) :$

$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

D.h. f ist <u>gleichmäßig stetig</u>

1

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^2$

Behauptung. f ist <u>nicht</u> gl. stetig.

Beweis. Angenommen, f sei gl. stetig.

Dann für $\varepsilon := 1$ existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass

$\forall x, x' \in \mathbb{R} : |x - x'| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad (*)$

Seien nun

$x := \boxed{\max\{0, \frac{1}{2}(\frac{2}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{2})\}}$

$x' := x + \frac{\delta_1}{2}$

Dann $|x - x'| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$,

sodass wegen $(*)$ $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ gilt.

$\Rightarrow \frac{\delta_1}{2} |x + x'| = |x - x'| \cdot |x + x'|$

$= |x^2 - x'^2| = |f(x) - f(x')| < 1$

$\Rightarrow 2x + \frac{\delta_1}{2} = x + x' = |x + x'| < \frac{2}{\delta_1}$

da $x \geq 0$ und $x' > x \geq 0$, sodass $x + x' \geq 0$ gilt.

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}(\frac{2}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{2}) \quad ↯$

Widerspricht wahl von x!

Darum ist die Annahme falsch.
Also ist f <u>nicht</u> gl. stetig. $\square$

2

c) $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad : x \longmapsto x^2$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$

Dann für $x, x' \in (0,1)$

$|x - x'| < \delta$

$\Longrightarrow |f(x) - f(x')|$

$= |x^2 - x'^2|$

$= \underbrace{|\overbrace{x+x'}^{\geq 0}|}_{= x+x'} \underbrace{|x - x'|}_{< \delta}$

$< \underbrace{(x+x')}_{< 1+1 = 2} \cdot \delta < 2 \cdot \delta = \varepsilon$

$\Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

hier Vorsichtig sein! Wenn Definitionsbereich $[0,1]$ wäre, hätten wir hier $\leq$. Dann wähle bzw. $\delta := \varepsilon/4$ statt $\delta := \varepsilon/2$.

Also, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in (0,1):$

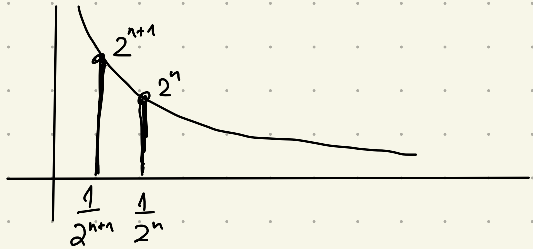
$\quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

D.h. f ist <u>gleichmäßig stetig</u>.

d) $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>Beobachtung</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

- $\left|\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}$;
- $\left|f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| = |2^{n+1} - 2^n| = 2^n$.



Sei nun $\varepsilon := 1 > 0$. Angenommen, es gebe $\delta > 0$ s.d.

$\forall x, x' \in (0,1) : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$

Dann wähle $n \in \mathbb{N}$ groß, so dass

$\frac{1}{2^{n+1}} < \delta$ und $2^n > \varepsilon$.

Dann für $x := \frac{1}{2^n} \in (0,1)$ und $x' := \frac{1}{2^{n+1}} \in (0,1)$ gelten

- $|x - x'| = \frac{1}{2^{n+1}} < \delta$; aber
- $|f(x) - f(x')| = 2^n > \varepsilon$.

Widerspruch!

Also kann f nicht gl. stetig sein.

ÜB 10 A2

Es sei $N : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$N(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & : x = \frac{p}{q} \text{ mit} \end{cases}$$

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd

Sei nun $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ fixiert.

Behauptung: f ist stetig im Pkt x.

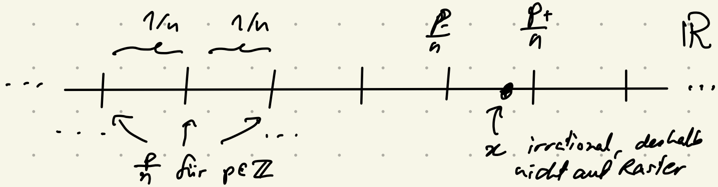
Beweis Beobachte zunächst, dass für $n \in \mathbb{N}$:

Da x irrational, so gilt

$$d_n := \min\{|\tfrac{p}{n} - x| \mid p \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \min\{|\tfrac{p_+}{n} - x|, |\tfrac{p_-}{n} - x|\} > 0,$$

wobei $p_- = [nx]$; $p_+ = [nx]+1$.

Bildlich Darstellung:



3

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ groß mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $(*)$

Setze $\delta := \min\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

Sei $x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|x' - x| < \delta$.

Fall 1. $x' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Dann $|f(x') - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Fall 2. $x' \in \mathbb{Q}$.

Seien $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit $\frac{p}{q} = x'$

Falls $q \in \{1, 2, \dots, n\}$, so gilt

$$\boxed{d_q \geq \delta} > |x' - x| = |\tfrac{p}{q} - x|,$$

was aber die Minimalität von d_q widerspricht!

Darum muss $q > n$ gelten $(**)$

$$\Longrightarrow |f(x') - f(x)| = |\tfrac{1}{q} - 0| = \tfrac{1}{q} \overset{(**)}{<} \tfrac{1}{n} \overset{(*)}{<} \varepsilon.$$

Darum $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:
$$|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

D.h. f stetig im Punkt x.

ÜB10 A3

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ nicht leer. Setze

$d_A : \mathbb{C} \longrightarrow [0,\infty);\qquad z \longmapsto \inf_{w\in A} |z-w|$

Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:

$\forall a \in A:\ d_A(z) \leq |z-a| \leq |z-z'| + |z'-a|$

wegen Inf-Definition

$\Rightarrow\ \forall a\in A:\ |z'-a| \geq d_A(z) - |z-z'|$

$\Rightarrow\ \{|z'-a| \mid a\in A\}$ beschr. nach unten durch $d_A(z) - |z-z'|$

$\overset{\text{Def}^{\text{n}} \text{ von Inf}}{\Longrightarrow}\quad d_A(z') = \inf\{|z'-a| \mid a\in A\}$

$\geq d_A(z) - |z-z'|$

$\Rightarrow\ d_A(z) - d_A(z') \leq |z-z'|$

Analog lässt sich argumentieren, dass $d_A(z') - d_A(z) \leq |z'-z| = |z-z'|$.

Darum $|d_A(z) - d_A(z')|$

$= \max\{d_A(z) - d_A(z'),\ d_A(z') - d_A(z)\}$

$\leq |z-z'|$.

Da dies für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt, ist d_A lipschitzstetig mit Konstante 1.

4

ÜB10 A3

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Angenommen,

$$f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty);\ x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

sei lipschitzstetig.
Dann existiert ein $C > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in [0,\infty): \ |f(x) - f(x')| \leq C \cdot |x - x'|$$

[einfacher Weg]:

$$\Longrightarrow \ \forall x \in [0,\infty): \ x^{1/n} \leq Cx$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall y \in [0,\infty): \ y \leq Cy^n$$

da $y \in [0,\infty) \longmapsto y^n \in [0,\infty)$ surj. ist
da " " wohldef. ist

$$\Longleftrightarrow \ \forall y \in [0,\infty): \ y^{n-1} \geq C$$

brauchen nur das

$$\Longleftrightarrow \ \forall x \in [0,\infty): \ x \geq C$$

da $y \in [0,\infty) \longmapsto y^{n-1} \in [0,\infty)$ surj. ist.
da " " wohldef. ist

$$\Longleftrightarrow \ [0,\infty) \subseteq [C,\infty)$$

Dies ist ein Widerspruch, da $C > 0$ und $\frac{C}{2} \in [0,\infty)$ aber $\frac{C}{2} \notin [C,\infty)$, da $\frac{C}{2} < C$.

Darum ist f nicht lipschitzstetig.

5

Bemerkung

$$\Longleftrightarrow \ \forall y, y' \in [0,\infty): \cancel{|y - y'|} \leq C \cdot |y^n - y'^n|$$

$$= C \cdot \cancel{|y - y'|} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y^k y'^{n-1-k}$$

Idee: wähle $y_i, y_i' \xrightarrow[i]{} 0$ mit $y \neq y'$

z.B. $y_i = 2^{-i}$, $y_i' = 3^{-i}$

Dann $0 < C^{-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} y_i^k y_i'^{n-k} \xrightarrow[i]{} \sum_{k=0}^{n-1} 0^k 0^{n-k} = 0$

Also $0 < C^{-1} \leq 0$ (warum folgt dies?)

Widerspruch!

ÜB10 Z1.

Betrachte die Bedingungen auf einer Fkt
$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(P1) E stetig
(P2) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \; E(x+y) = E(x)\,E(y)$

<u>Beobachtungen</u>

1) $\forall n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}: \; E(n \cdot x) = E(x)^n$ } lässt sich per Ind. beweisen
2) $\forall x \in \mathbb{R}: \; E(x) = E(2 \cdot \frac{x}{2}) = E(\frac{x}{2})^2 \geq 0$
Darum $rg(E) \subseteq [0, \infty)$.
3) $E(0) = E(0+0) = E(0)^2$
$\Longrightarrow \; E(0) \cdot (E(0) - 1) = 0$
$\Longrightarrow$ **$E(0) = 0$ oder 1.**
wenn $E(0) = 0$, so gilt
$\forall x \in \mathbb{R}: \; E(x) = E(0+x) = E(0)\,E(x) = 0 \cdot E(x) = 0$
d.h. $E \equiv 0$ überall. $\rightsquigarrow$ "trivialer Fall"
4) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt im nicht trivialen Falle:
$1 = E(0) = E(-x+x) = E(-x)\,E(x)$
$\Longrightarrow E(-x) = E(x)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
insbesondere $E(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

5) aus (1) erhält man
5a) für $n \in \mathbb{N}$:
$E(1) = E(n \cdot \frac{1}{n}) = E(\frac{1}{n})^n$
$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \; E(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{E(1)}$ "positive n-te Wurzel"
5b) für $m, n \in \mathbb{N}$:
$E(\frac{m}{n}) = E(m \cdot \frac{1}{n})$
$\overset{(1)}{=} E(\frac{1}{n})^m \overset{(5a)}{=} \left(\sqrt[n]{E(1)}\right)^m$
$= E(1)^{m/n}$
5c) für $m, n \in \mathbb{N}$, im nicht trivialen Falle
$E(-\frac{m}{n}) \overset{(4)}{=} E(\frac{m}{n})^{-1} \overset{(5b)}{=} \left(E(1)^{m/n}\right)^{-1}$
$= E(1)^{-m/n}$
$E(0) = 1 = \underbrace{E(1)}_{>0}{}^0$

Aus (3–5) folgt
entweder $E \equiv 0$ überall
<u>oder</u> $E(1) > 0$ und $\forall r \in \mathbb{Q}: \; E(r) = E(1)^r$.

6

Seien nun $E, E' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebige Fkt, die P1+P2 genügen.

Angenommen, $E(1) = E'(1)$.
Dann:

Fall 1. $E(1) = E'(1) = 0$

Dann $E \equiv 0$ überall
und $E' \equiv 0$ überall.
Also $E = E'$.

Fall 2. $E(1) = E'(1) \neq 0$.

Dann $\forall r \in \mathbb{Q}: E(r) = E(1)^r = E'(1)^r = E'(r)$.
Also
$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) - E'(x) = 0\} \supseteq \mathbb{Q}$$
Aus $\mathbb{Q} \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{R}$ folgt
$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}.$$
da $\mathbb{Q}$ dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Also $\overline{\Sigma} = \mathbb{R}$.

Setze $f := E - E' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
Dann ist f stetig und damit ist
$$\Sigma = f^{-1}[\{0\}]$$
abgeschlossen.

$\Longrightarrow \quad \Sigma = \overline{\Sigma} = \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ per Konstr. von Σ gilt
$\forall x \in \mathbb{R}: E(x) = E'(x)$
D.h. $E = E'$.

Fall 2.

In allen Fällen gilt also
$$E(1) = E'(1) \Longrightarrow E = E'$$

Darum ist jede Fkt $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die P1 + P2 erfüllt durch $E(1)$ eindeutig festgelegt.