Ana I, Woche 1 Übung

21. Okt 2021

Blatt 0 — Aufgabe 3

Beh. Seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$.
Dann (i) $\iff$ (ii), wobei
(i) f bijektiv
(ii) ex. $g: Y \to X$
$$\underbrace{f \circ g = id_X}_{(*)} \quad \text{und} \quad \underbrace{g \circ f = id_Y}_{(**)}$$

Beweis.
((i) $\Rightarrow$ (ii)) Sei f bijektiv.
Z: Ein g existiert, das $(*)$ + $(**)$ erfüllt.

> Setze für jedes $y \in Y$
> $g(y) :=$ das eindeutige $x \in X$ mit $f(x) = y$.

– Z_1: g wohldefiniert:
g ordnet jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ zu, weil f surjektiv und injektiv ist.

– Z_2: Zu $(*)$: Sei $y \in Y$ beliebig. Dann **per Konstr.** gilt $g(y) =$ dasjenige $x \in X$ mit $f(x) = y$.
Also $f(g(y)) = f(x) = g(y)$.
Da $y \in Y$ beliebig gewählt wurde, gilt $(*)$.

hier haben wir die Annahme gebraucht.

Zu $(**)$ sei $x \in X$ dann

...

also gilt $g(f(x)) = x$. Also gilt $(**)$.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (i)</u> Es existiere ein $g: Y \to X$ mit $(*)$ und $(**)$.

Z: f ist bijektiv, d.h. <u>inj</u> + <u>surj</u>.

<u>Zur Inj.</u>: Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig.

Wenn $f(x_1) = f(x_2)$,

dann $x_1 = id_X(x_1)$

$$\overset{(**)}{=} g(f(x_1))$$

$$= g(f(x_2))$$

$$\overset{(**)}{=} id_X(x_2) = x_2$$

Darum ist f injektiv.

Zur Surj. von f:

Sei $y \in Y$ beliebig

Zu finden: ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Setze $x := g(y)$ (was ja in X liegt.

$$f(x) = f(\underline{g(y)}) \overset{(*)}{=} id_Y(y) = y.$$

Darum ist f surjektiv

Darum ist f bijektiv.

$\square$ (Behauptung)

Rekursion; Beispiel

(nicht in Übung besprochen)

- $n! = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$

$$V_n : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$: g \longmapsto n \cdot g(n)$$

$$f(1) := 1 \; ; \; f(v(n)) = V_n(f|_{A_n}) = n \cdot f(n)$$

- $\binom{n}{k}$ lässt sich auf zwei Weisen definieren:

$n, k \in \mathbb{N}_0$
$k \leq n$

<u>Methode 1</u> $\binom{n}{k} := \#\{A \subseteq \{1,2,\dots,n\} \mid \#A = k\}$

(kombinatorische Definition)

<u>Methode 2</u> $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Per vollst. Ind. lässt sich zeigen, dass beide Ansätze übereinstimmen.