Ana I, Woche 4 Übung

4. Nov 2021

Agenda

- **Orga**
  - ÜB0 + 1
  - Takt
  - Anmerkung im Moodle
- **Besprechung $ÜB_2$**
  - A1 vorrechnen?
  - A2 vorrechnen?
  - A3 vorrechnen?
  - A4 vorrechnen?
- **Besprechung $ÜB_3$**
  - Stil aus VL für A1
  - A2: Anordnungen, $char(K)$,
    Satz: $char(K) \neq 0 \Rightarrow K$ hat keine Anordnung
  - A3: Beziehung zw. (a) und (b)?

(1

ÜB2 A1

Gegeben: (N, e, ν) erfülle P1+P2.

Seien $(A_n)_{n\in N}$ die (eindeutig) durch

$$A_e := \{e\}; \quad A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\} \text{ für } n \in N$$

rekursiv definierten Teilmengen von N.

Beh. Sei $B(\cdot)$ eine Aussage, s.d.

(α): $B(e)$

(β): $\forall n \in N: (\forall k \in A_n: B(k) \Rightarrow B(\nu(n)))$

Dann gilt $B(n)$ für alle $n \in N$

Beweis

~~Setze $M := \{n \in N \mid B(n) \text{ gilt}\}$~~

Setze $M := \{n \in N \mid \forall k \in A_n: B(k) \text{ gilt}\}$

Z: $M = N$ (warum?)

Da (N, e, ν) Axiom P2 genügt, reicht es aus **Z:**

i) $e \in M$

ii) für alle $n \in M$ gilt $\nu(n) \in M$

d.h. M ist **induktiv**

Zu i):

Sei $k \in A_e$ beliebig

$\Longrightarrow k = e$, da $A_e = \{e\}$. ***)**

Aus ***)** + **(α)** folgt $B(k)$.

$\Longrightarrow \forall k \in A_e: B(k)$ gilt

$\xrightarrow[\text{Konstr. von } M]{} e \in M$

Darum gilt **i)**.

Zu ii):

Sei $n \in M$ beliebig.

Δ) $\xRightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\forall k \in A_n$: $B(k)$ gilt.

$\dagger$) Aus **Δ)** + **(β)** folgt $B(\nu(n))$.

Sei $k \in A_{\nu(n)}$ beliebig.

Fall 1 $k \in A_n$: Wegen **Δ)** gilt $B(k)$

Fall 2 $k = \nu(n)$: Wegen **$\dagger$)** gilt $B(k)$.

warum nur diese Fälle?

$\Longrightarrow$ $\forall k \in A_{\nu(n)}$: $B(k)$ gilt.

$\xRightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\nu(n) \in M$

$\Longrightarrow$ $\forall n \in M$: $\nu(n) \in M$

Darum gilt **ii)**.

(2

Da (N, e, ν) P2 genügt, folgt aus **i)** + **ii)** dass $M = N$

Sei nun $n \in N$ beliebig.

$\Longrightarrow$ $n \in M$, da $M = N$.

$\xRightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\forall k \in A_n$: $B(k)$ gilt

$\Longrightarrow$ $B(n)$ gilt, da $n \in A_n$.

$\Longrightarrow$ $\forall n \in N$: $B(n)$ gilt.

$\square$ (Beh.)

ÜB2 A2

Beh. 1. L ist induktiv, wobei

$L := \{n \in N \mid$ das einzige $x \in A_n$ mit $v(x) \notin A_n$ ist $x = n\}$

Bew. Z: **1)** $e \in L$; **2)** $\forall n \in L: \; v(n) \in L$

Im Folgenden setzen wir für $n \in N$

$$S_n := \{x \in A_n \mid v(x) \notin A_n\}.$$

Per Konstr. gilt $L = \{n \in N \mid S_n = \{n\}\}$.

Zu 1: Da $A_e = \{e\}$, gilt $S_e \subseteq A_e = \{e\}$.
Da (N, e, v) Axiom P1 erfüllt, gilt $v(e) \neq e$.

$\Longrightarrow$ $(e \in A_e$ und$)$ $v(e) \notin A_e$

$\Longrightarrow$ $e \in S_e$

$\Longrightarrow$ $\{e\} \subseteq S_e \subseteq \{e\}$

$\Longrightarrow$ $S_e = \{e\}$

$\Longrightarrow$ $e \in L$.

Darum gilt **1**.

3

Zu 2: Sei $n \in L$ beliebig.
Dann $S_n = \{n\}$. Wir müssen zeigen, dass $S_{v(n)} = \{v(n)\}$ gilt.

$\subseteq$:

Sei $x \in S_{v(n)}$ beliebig.

Dann $x \in A_{v(n)} \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} A_n \cup \{v(n)\}$
und $v(x) \notin A_{v(n)}$.

Fall 1 $\quad x = v(n)$ (gut!)

Fall 2 $\quad x \in A_n$.
Da $A_{v(n)} \supseteq A_n$ und $v(x) \notin A_{v(n)}$,
gilt $v(x) \notin A_n$.
Darum $x \in S_n \overset{\text{Annahme}}{=} \{n\}$.
Also $x = n$.
Aber dann $v(x) = v(n) \in A_{v(n)}$.
Widerspruch!

Darum ist nur Fall 1 möglich.
D.h. $x = v(n)$.

$\Longrightarrow \forall x \in S_{v(n)}: \; x = v(n)$ $\quad$ d.h. $S_{v(n)} \subseteq \{v(n)\}$

(ÜB2, A2, Beh 1, 2))

⊇: Wir müssen zeigen, dass $m := v(n) \in S_{v(n)}$.

Da $m = v(n) \in A_{v(n)}$, reicht es aus zu zeigen, dass
$$v(m) \notin A_{v(n)} \left(\overset{\text{Def}^n}{=} A_n \cup \{v(n)\} \right)$$

a. Da $v(k) \neq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe **[VL, Seite 16]**), gilt $v(m) = v(v(n)) \neq v(n)$. Also $v(m) \notin \{v(n)\}$.

Nebenargument Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Wenn $v(k) \in A_l$, dann laut **[VL, Seite 19]** gilt $(k \in A_k \subseteq A_k \cup \{v(k)\} =) A_{v(k)} \subseteq A_l$. Also $k \in A_l$. D.h. $\forall k, l \in \mathbb{N}: v(k) \in A_l \Rightarrow k \in A_l$.

b. Also, aus $v(m) \in A_n$ würde $(v(n) =) m \in A_n$ folgen. Da $n \in L$, ist dies unmöglich.

4

a + b
$$\Longrightarrow v(m) \notin A_n \cup \{v(n)\} \overset{\text{Konstr.}}{=} A_{v(n)}$$
$$\Longrightarrow v(n) \in A_{v(n)}$$
und $(v(v(n)) =) v(m) \notin A_{v(n)}$
$$\overset{\text{Konstr. von } S}{\Longrightarrow} v(n) \in S_{v(n)}$$
$$\Longrightarrow \{v(n)\} \subseteq S_{v(n)}$$

Aus den **⊆** + **⊇** Teilargumenten folgt $S_{v(n)} = \{v(n)\}$. Darum $v(n) \in L$.

Darum gilt **2**.

Aus **1** + **2** folgt die Behauptung.

$\square$ (Beh.)

Beh 2. (N, e, v) erfülle P1 + P2.

Sei $\leqslant$ auf N wie folgt definiert:

$$x \leqslant y \;:\Longleftrightarrow\; A_x \subseteq A_y.$$

Dann ist $(N, \leqslant)$ eine OR.

Beweis

Refl Sei $x \in N$ bel. Dann $A_x = A_x$ und damit $A_x \subseteq A_x$, woraus sich $x \leqslant x$ ergibt.

Trans Seien $x, y, z \in N$. Dann

$$x \leqslant y \text{ und } y \leqslant z$$
$$\overset{\text{Konstr.}}{\Longrightarrow} \quad A_x \subseteq A_y \text{ und } A_y \subseteq A_z$$
$$\Longrightarrow \quad A_x \subseteq A_z$$
$$\overset{\text{Konstr.}}{\Longrightarrow} \quad x \leqslant z.$$

Antisymmetrie

Seien $x, y \in N$.
Angenommen, $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$.
Dann $A_x \subseteq A_y$ und $A_y \subseteq A_x$.

Also $A_x = A_x =: B$.

Laut **Beh 1** wissen wir, dass $L \subseteq N$ induktiv ist. Da (N, e, v) P2 genügt, folgt $L = N$.

$\Rightarrow x, y \in L$

$\Rightarrow$ x ist das einzige El. in A_x mit $v(x) \notin A_x$
und y " " " " " A_y " $v(y) \notin A_y$

$\Rightarrow$ x ist das einzige El. in B mit $v(x) \notin B$
und y " " " " " B " $v(y) \notin B$

$\Rightarrow$ $x = y$, weil beide eindeutig die o.S. Eigenschaft besitzen.

$\square$ (Beh.)

ÜB2 A3

Beh 3. (N, e, ν) erfülle P1 + P2.

Dann $\forall k, n \in N: \quad \underbrace{P(k,n)}_{\exists f: A_k \to A_n \text{, eine Bijektion}}$

$\iff k = n$

Beweis Setze

$$L := \{n \in N \mid \forall k \in N: P(k,n) \Leftrightarrow k = n\}$$

Da (N, e, ν) P2 erfüllt, reicht es aus zu zeigen, dass L induktiv ist, woraus sich die Behauptung offensichtlich ergibt.

$e \in L$: Sei $k \in N$ beliebig. Z: $P(k,e) \Leftrightarrow k = e$

$\Leftarrow$: wenn $k = e$, dann gilt $P(k,e)$ weil $f = id_{A_e}$ eine Bijektion zwischen $A_k = A_e$ und A_e ist

$\Rightarrow$: (Kontraposition) Angenommen, $k \neq e$. Da $\nu: N \to N \setminus \{e\}$ surjektiv ist gilt $k = \nu(k')$ für ein $k' \in N$.

Dann $A_k = A_{\nu(k')}$

$= A_{k'} \cup \{\nu(k')\}$

Aus der VL wissen wir

$k = \nu(k') \neq k'$.

Da $k' \in A_{k'} \subseteq A_k$ und $k \in A_k$, sind k', k zwei versch. El. in A_k

Sei $f: A_k \longrightarrow A_e = \{e\}$ beliebig. Dann muss $f(k') = e = f(k)$ gelten, sodass wegen $k' \neq k$ die Fkt f nicht injektiv (und damit nicht bijektiv) sein kann.

$\Rightarrow P(k,e)$ kann nich gelten.

Darum $\forall k \in N: P(k,e) \Leftrightarrow k = e$.

Also $e \in L$.

$n \to v(n)$

Sei $n \in L$ beliebig.

Wir müssen zeigen, dass $v(n) \in L$.

Sei $k \in N$ beliebig. Z: $P(k, v(n)) \Leftrightarrow k = v(n)$

$\Leftarrow$: wenn $k = v(n)$, dann gilt $P(k, v(n))$ weil $f = id_{A_{v(n)}}$ eine Bijektion zwischen $A_k = A_{v(n)}$ und $A_{v(n)}$ ist.

$\Rightarrow$: Angenommen, $P(k, v(n))$ gelte. Dann existiert eine Bijektion

$$f : A_k \to A_{v(n)}$$

Fall 1 $k = e$. Dann ist

$$f^{-1} : A_{v(n)} \to A_e$$

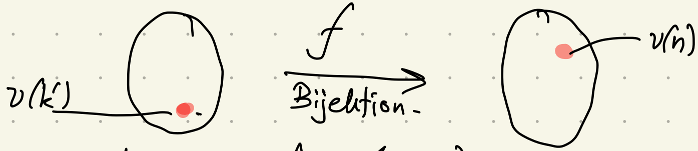
eine Bijektion, d.h. $P(v(n), e)$ gilt. Da $e \in L$, folgt $v(n) = e$, was ein Widerspruch zu $Bild(v) = N \setminus \{e\}$ ist.

Also ist dieser Fall ausgeschlossen.

Fall 2 $k \neq e$. Da $v : N \to N \setminus \{e\}$ surjektiv ist, existiert $k' \in N$ mit $v(k') = k$.

Wir haben also

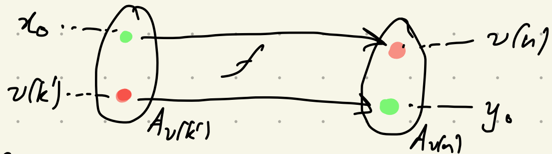
$$A_{v(n)} = A_n \cup \{v(n)\}$$



$$A_k = A_{v(k')} = A_{k'} \cup \{v(k')\}$$

Beh 3a $\exists f' : A_{v(k')} \to A_{v(n)}$ bijektiv mit $f'(v(k')) = v(n)$.

Bew Falls $f(v(k')) = v(n)$, setze $f' := f$. Ansonsten



setze

$$x_0 := f^{-1}(v(n)) \in A_{v(k')}$$
$$y_0 := f(v(k')) \in A_{v(n)}$$

Dann per Annahme $x_0 \neq v(k')$, $y_0 \neq v(n)$.

Setze

$$f' : x \in A_{v(k')} \mapsto \begin{cases} f(x) : & x \notin \{x_0, v(k')\} \\ y_0 : & x = x_0 \\ v(n) : & x = y_0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad f' = \sigma \circ f$

wobei $\sigma : A_{\nu(n)} \longrightarrow A_{\nu(n)}$

die (bijektive!) Permutation auf $A_{\nu(n)}$ ist, die y_0 und $\nu(n)$ tauschen. (warum?)

$\Longrightarrow$ als Komposition zweier Bijektionen ist $f' : A_{\nu(k')} \longrightarrow A_{\nu(n)}$ bijektiv und weiterhin gilt $f'(\nu(k')) = \nu(n)$.

$\square$ (Beh 3a)

Wegen **Beh 3a** können wir o.E f durch f' ersetzen und annehmen, dass $f(\nu(k')) = \nu(n)$ erfüllt. *

Setze jetzt $g := f|_{A_{k'}}$

Dann ist g eine injektive Fkt (weil f injektiv ist), mit

$$\mathrm{Dom}(g) = A_{k'} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bild}(g) &= f(A_{k'}) \\
&= f(\underbrace{A_{\nu(k')} \setminus \{\nu(k')\}}) \\
&\overset{f \text{ inj}}{=} f(A_{\nu(k')}) \setminus f(\{\nu(k')\}) \\
&\overset{f \text{ surj}}{=} \underbrace{A_{\nu(n)} \setminus \{\nu(n)\}} \\
&= A_n
\end{aligned}$$

** weil $A_{\nu(k')} = A_{k'} \cup \{\nu(k')\}$ und laut **A2** $\nu(k') \notin A_{k'}$, sodass $A_{k'}$, $\{\nu(k')\}$ disjunkt sind.

wegen *

gleich wegen **

Also ist g ein Bij. zw. $A_{k'}$ und A_n.
D.h. $P(k', n)$ gilt.
Da $n \in L$, folgt $k' = n$
und damit $k = \nu(k') = \nu(n)$.

Darum haben wir gezeigt:

$$\forall k \in N: \ P(k, v(n)) \Longleftrightarrow k = v(n)$$

Also gilt $v(n) \in L$.

Also haben wir bewiesen, dass L induktiv ist.
Wie oben argumentiert folgt hieraus die Behauptung.

$\square$ (Beh 3)

ÜB2 A4

(Skizze)

IA: $f(0) = 0 = 2^0 - 1$
$f(1) = 3 = 2^1 + 1$.

IV. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen
$$\forall k \in \mathbb{N}_0: k \leq n \Rightarrow f(k) = \begin{cases} 2^k - 1 : k \text{ ger.} \\ 2^k + 1 : k \text{ unger.} \end{cases}$$

Fall 1 $n+1$ gerade

Dann
$$f(n+1) \overset{\text{Konstr.}}{=} \underbrace{f(n)}_{\text{unger.}} + 2\underbrace{f(n-1)}_{\text{ger.}}$$
$$\overset{\text{IV}}{=} (2^n + 1) + 2(2^{n-1} - 1)$$
$$= 2 \cdot 2^n + 1 - 2$$
$$= 2^{n+1} - 1$$

Fall 2 $n+1$ ungerade

Dann
$$f(n+1) \overset{\text{Konstr.}}{=} \underbrace{f(n)}_{\text{ger.}} + 2\underbrace{f(n-1)}_{\text{unger.}}$$
$$\overset{\text{IV}}{=} (2^n - 1) + 2(2^{n-1} + 1)$$
$$= 2 \cdot 2^n - 1 + 2$$
$$= 2^{n+1} + 1$$

Also gilt die Aussage für $n+1$.
Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$