Ana I, Woche 12 übung

13. Januar 2022

Agenda

- **Orga**
  - Probeklausur
  - übrige Wochen
  - üg Anmerkungen
- **ÜB10** ✓
- **ÜB11** ✓

0

ÜB10 A1.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Sei $\delta := \varepsilon$

Für $x, x' \in \mathbb{R}$
$|x - x'| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')|$
$= |x - x'| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow f$ gl. stetig.

1

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$

<u>Beh</u>
f ist nicht gl. stetig.

<u>Bew</u> Angenommen nicht.
Dann für $\varepsilon := 1$ gibt
es $\delta_1 > 0$ s.d. $\forall x, x' \in \mathbb{R}$: $|x - x'| < \delta_1$ (*)
$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Seien $x := N\delta_1$ mit $N > \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\delta_1^2} - \frac{1}{2}\right)$
$x' := x + \frac{\delta_1}{2}$

Dann $|x - x'| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$

Also gilt wegen (*) $|f(x) - f(x')| < 1$

$\Rightarrow |x^2 - x'^2| < 1$

$\Rightarrow \frac{\delta_1}{2} |x + x'| = |x + x'| \cdot |x - x'| < 1$

$\Rightarrow |2x + \frac{\delta_1}{2}| < \frac{2}{\delta_1}$

$\Rightarrow N < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\delta_1^2} - \frac{1}{2}\right)$ ↯

Widerspruch! Also ist f gl. stetig.

2

c) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$: x \mapsto x^2$.

f gl. stetig:

Sei $\varepsilon > 0$

Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$

Dann für $x, x' \in (0,1)$

$|x - x'| < \delta$

$\Longrightarrow |f(x) - f(x')|$

$= |x^2 - x'^2|$

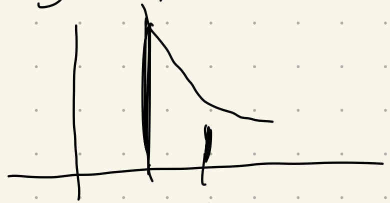
$= |x + x'| \underbrace{|x - x'|}_{\delta}$

$< \delta \cdot (\underbrace{x + x'}_{< 1+1 = 2}) < 2\delta = \varepsilon$

$\Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in (0,1):$
$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

d) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$



$\frac{1}{2^{n+1}}$ $\frac{1}{2^n}$

Beobachtung

$\left| f\left(\frac{1}{2^n}\right) - f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \right| = |2^{n+1} - 2^n| = 2^n$

$\left| \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2^{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$

Sei $\varepsilon := 1$. Ang., es gebe $\delta > 0$ s.d. $\forall x, x' \in (0,1)$: $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Dann wähle $n \in \mathbb{N}$ groß s.d.

$\frac{1}{2^{n+1}} < \delta$ und $2^n > \varepsilon$

Dann für $x := \frac{1}{2^n}$ und $x' := \frac{1}{2^{n+1}}$ gelten

$|x - x'| = \frac{1}{2^{n+1}} < \delta$

aber $|f(x) - f(x')| = 2^n > \varepsilon$ ↯

$\Longrightarrow$ f nicht gl. stetig.

ÜB 10 A2

3

$N: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$N(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ \frac{1}{p} & : x = \frac{q}{p} \end{cases}$$

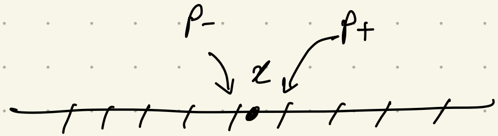
$p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$ teilerfremd

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

<u>Beh</u> f stetig in x.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $p_- < nx < p_+$ mit $p_-, p_+ \in \mathbb{Z}$, s.d.

$$\forall p \in \mathbb{Z}: \left|\frac{p}{n} - x\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p_-}{n} - x\right|, \left|\frac{p_+}{n} - x\right|\right\} =: d_n$$



Sei $\varepsilon > 0$:

Setze $\delta := \min\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ wobei n genügend groß gewählt wird, s.d. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Sei $x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|x' - x| < \delta$.

<u>Fall 1</u> $x' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Dann $|f(x') - f(x)| = |0-0| = 0 < \varepsilon$.

<u>Fall 2</u> $x' \in \mathbb{Q}$.

Seien $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit $\frac{p}{q} = x'$.

Da $\left|\frac{p}{q} - x\right| < \delta$, kann q nicht in $\{1, \dots, n\}$ liegen, sonst $\left|\frac{p}{q} - x'\right| < d_q$

$\Rightarrow$ widerspricht Minimalität von d_q

$$\Rightarrow \quad q > n$$

$$\Rightarrow \quad |f(x') - f(x)|$$
$$= \left|\frac{1}{q} - 0\right|$$
$$= \frac{1}{q}$$
$$< \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f stetig in x.

ÜB10 A3

4

$A \subseteq \mathbb{C}$ nicht leer

$d_A : \mathbb{C} \to [0,\infty)$; $z \mapsto \inf_{w \in A} |z-w|$

Für $z, z' \in \mathbb{C}$:

$\forall a \in A : d_A(z) \leq |z-a| \leq |z-z'| + |z'-a|$

wegen Inf-Definition

$\Rightarrow \forall a \in A : \quad d_A(z) - |z-z'| \leq |z'-a|$

$\Rightarrow \{|z'-a| \mid a \in A\}$ nach unten beschr. durch $d_A(z) - |z-z'|$

$\overset{\text{Inf}}{\Rightarrow} \quad d_A(z') = \inf\{|z'-a| \mid a \in A\}$
$$\geq d_A(z) - |z-z'|$$

$\Rightarrow \quad \underline{d_A(z) - d_A(z')} \leq |z-z'|$

analog gilt $\underline{d_A(z') - d_A(z)} \leq |z'-z| = |z-z'|$

$\Rightarrow |d_A(z') - d_A(z)| = \max\{\ ,\ \} \leq |z-z'|$

ÜB10 A3

$n \geq 2$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Angenommen,

$$f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty);\ x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

sei lipschitzstetig.
Dann existiert ein $C > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in [0,\infty) : \ |f(x) - f(x')| \leq C \cdot |x - x'|$$

[einfacher Weg]:

$$\Longrightarrow \ \forall x \in [0,\infty): \ x^{1/n} \leq Cx$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall y \in [0,\infty): \ y \leq C y^n$$

da $y \in [0,\infty) \longmapsto y^n \in [0,\infty)$ surj. ist
da " " wohldef. ist

$$\Longleftrightarrow \ \forall y \in [0,\infty): \ y^{n-1} \geq C$$

brauchen aber das

$$\Longleftrightarrow \ \forall x \in [0,\infty): \ x \geq C$$

da $y \in [0,\infty) \longmapsto y^{n-1} \in [0,\infty)$ surj. ist.
da " " wohldef. ist

$$\Longleftrightarrow \ [0,\infty) \subseteq [C,\infty)$$

Dies ist ein Widerspruch, da $C > 0$ und $\frac{C}{2} \in [0,\infty)$ aber $\frac{C}{2} \notin [C,\infty)$, da $\frac{C}{2} < C$.

Darum ist f nicht lipschitzstetig.

Bemerkung

$$\Longleftrightarrow \ \forall y, y' \in [0,\infty): \cancel{|y - y'|} \leq C \cdot |y^n - y'^n|$$

$$= C \cdot \cancel{|y - y'|} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y^k y'^{n-1-k}$$

Idee: wähle $y_i, y_i' \xrightarrow[i]{} 0$ mit $y \neq y'$
z.B. $y_i = 2^{-i}$, $y_i' = 3^{-i}$

Dann $0 < C^{-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} y_i^k y_i'^{n-k} \xrightarrow[i]{} \sum_{k=0}^{n-1} 0^k 0^{n-k} = 0$

Also $0 < C^{-1} \leq 0$ (warum folgt dies?)

Widerspruch!

ÜB10 Z1.

Betrachte die Bedingungen auf einer Fkt
$E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(P1) E stetig
(P2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad E(x+y) = E(x)\,E(y)$

Beobachtungen

1) $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}: \quad E(n \cdot x) = E(x)^n$ } lässt sich per Ind. beweisen
2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad E(x) = E(2 \cdot \frac{x}{2}) = E(\frac{x}{2})^2 \geqslant 0$
   Darum $rg(E) \subseteq [0, \infty)$.
3) $E(0) = E(0+0) = E(0)^2$
   $\Longrightarrow \quad E(0) \cdot (E(0) - 1) = 0$
   $\Longrightarrow \quad \mathbf{E(0) = 0}$ oder $\mathbf{1}$.
   wenn $E(0) = 0$, so gilt
   $\forall x \in \mathbb{R}: \quad E(x) = E(0+x) = E(0)E(x) = 0 \cdot E(x) = 0$
   d.h. $E \equiv 0$ überall. $\rightsquigarrow$ „trivialer Fall"
4) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt im nicht trivialen Falle:
   $1 = E(0) = E(-x)E(x) = E(-x)\,E(x)$
   $\Longrightarrow E(-x) = E(x)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
   insbesondere $E(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

5) aus (1) erhält man
5a) für $n \in \mathbb{N}$:
$$E(1) = E(n \cdot \tfrac{1}{n}) = E(\tfrac{1}{n})^n$$
$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad E(\tfrac{1}{n}) = \sqrt[n]{E(1)}$$ „positive n-te Wurzel"

5b) für $m, n \in \mathbb{N}$:
$$E(\tfrac{m}{n}) = E(m \cdot \tfrac{1}{n}) \overset{(1)}{=} E(\tfrac{1}{n})^m \overset{(5a)}{=} \left(\sqrt[n]{E(1)}\right)^m = E(1)^{m/n}$$

5c) für $m, n \in \mathbb{N}$, im nicht trivialen Falle
$$E(-\tfrac{m}{n}) \overset{(4)}{=} E(\tfrac{m}{n})^{-1} \overset{(5b)}{=} \left(E(1)^{m/n}\right)^{-1} = E(1)^{-m/n}$$
$$E(0) = 1 = \underbrace{E(1)}_{>0}{}^{0}$$

Aus (3–5) folgt
entweder $E \equiv 0$ überall
oder $E(1) > 0$ und $\forall r \in \mathbb{Q}: \; E(r) = E(1)^r$.

7

Seien nun $E, E' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die P1 + P2 erfüllen.

Angenommen, $E(1) = E'(1)$.
Dann

Fall 1 $\quad E(1) = E'(1) = 0$

Dann $\quad E \equiv 0$ überall
und $\quad E' \equiv 0$ überall.
also $\quad E = E'$.

Fall 2 $\quad E(1) = E'(1) \neq 0$.

Dann $\forall r \in \mathbb{Q}: E(r) = E(1)^r = E'(1)^r = E'(r)$.
Also

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{E(x) - E'(x)}_{\substack{f(x) := \\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{stetig}}} = 0\} \supseteq \mathbb{Q}$$

Da f stetig ist, ist
$$\Sigma = f^{-1}\{0\}$$
abgeschlossen. Da $\mathbb{Q} \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{R}$, gilt $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}$. (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

Also $\Sigma = \overline{\Sigma} = \mathbb{R}$.

Da $\Sigma = \mathbb{R}$ gilt per Konstruktion dieser Menge
$$\forall x \in \mathbb{R}: E(x) = E'(x).$$
D.h. $E = E'$.

In allen Fällen gilt also
$$E(1) = E'(1) \Rightarrow E = E'.$$

Darum ist jede Fkt $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die P1 + P2 erfüllt durch $E(1)$ eindeutig festgelegt.