

Ana I, Woche 4 Übung

4. Nov 2021

Agenda

- Orga

- ÜBO + 1
- Taht
- Anmerkung im Moodle

- Besprechung $\ddot{U}B_2$

- A1 vorrechnen?
- A2 vorrechnen?
- A3 vorrechnen?
- A4 vorrechnen?

- Besprechung $\ddot{U}B_3$

- Stil aus VL für A1
- A2: Anordnungen, $\text{char}(K)$,
Satz: $\text{char}(K) \neq 0 \Rightarrow K$ hat keine
Anordnung
- A3: Beziehung zw. (a) und (b)?

ÜB 2 A1

Gegeben: (N, e, v) erfülle P1+P2.

Seien $(A_n)_{n \in N}$ die (eindeutig) durch

$$A_e := \{e\}; A_{v(n)} = A_n \cup \{v(n)\}$$

für $n \in N$

rekursiv definierten Teilmengen von N .

Beh. Sei $B(\cdot)$ eine Aussage, s. d.

(α) : $B(e)$

(β) : $\forall n \in N: (\forall k \in A_n: B(k) \Rightarrow B(v(n)))$

Dann gilt $B(n)$ für alle $n \in N$

Beweis

(1)

~~Setze $M := \{n \in N \mid B(n) \text{ gilt}\}$~~

Setze $M := \{n \in N \mid \forall k \in A_n: B(k) \text{ gilt}\}$

\mathbb{Z} : $M = N$ (warum?)

Da (N, e, v) Axiom P2 genügt, reicht es aus \mathbb{Z} :

i) $e \in M$

ii) für alle $n \in M$ gilt $v(n) \in M$

d.h. M ist induktiv

Zu i):

Sei $k \in A_e$ beliebig
 $\Rightarrow k = e$, da $A_e = \{e\}$. *

aus * + (α) folgt $B(k)$.

$\Rightarrow \forall k \in A_e: B(k) \text{ gilt}$

$\Rightarrow e \in M$

Konstr. von M

Darum gilt i)

Zu ii):

Sei $n \in M$ beliebig.

Δ) $\xrightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\forall k \in A_n: B(k)$ gilt.

\dagger) aus Δ) + (β) folgt $B(v(n))$.

Sei $k \in A_{v(n)}$ beliebig.

Fall 1 $k \in A_n$: Wegen Δ) gilt $B(k)$.

Fall 2 $k = v(n)$: Wegen \dagger) gilt $B(k)$.

$\implies \forall k \in A_{v(n)}: B(k)$ gilt.

$\xrightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $v(n) \in M$

$\implies \forall n \in M: v(n) \in M$

Darum gilt ii).

Da (N, e, v) P2 genügt, folgt aus i) + ii) dass $M = N$

Sei nun $n \in N$ beliebig.

$\implies n \in M$, da $M = N$.

$\xrightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\forall k \in A_n: B(k)$ gilt

$\implies B(n)$ gilt, da $n \in A_n$.

$\implies \forall n \in N: B(n)$ gilt.

□ (Beh.)

(2)

warum nur diese Fälle?

ÜB2 A2

Beh. 1. L ist induktiv, wobei

$L := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{das einzige } x \in A_n \text{ mit } v(x) \notin A_n \text{ ist } x=n\}$

Bew. Z: 1) $e \in L$; 2) $\forall n \in L: v(n) \in L$

Im Folgenden setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$S_n := \{x \in A_n \mid v(x) \notin A_n\}$.

Per Konstr. gilt $L = \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = \{n\}\}$.

Zu 1: Da $A_e = \{e\}$, gilt $S_e \subseteq A_e = \{e\}$.

Da (\mathbb{N}, e, v) Axiom P1 erfüllt, gilt $v(e) \neq e$.

$\implies (e \in A_e \text{ and } v(e) \notin A_e$

$\implies e \in S_e$

$\implies \{e\} \subseteq S_e \subseteq \{e\}$

$\implies S_e = \{e\}$

$\implies e \in L$.

Darum gilt 1.

Zu 2: Sei $n \in L$ beliebig.

(3)

Dann $S_n = \{n\}$. Wir müssen zeigen, dass $S_{v(n)} = \{v(n)\}$ gilt.

\subseteq :

Sei $x \in S_{v(n)}$ beliebig.

Dann $x \in A_{v(n)} \stackrel{\text{Defn}}{=} A_n \cup \{v(n)\}$
und $v(x) \notin A_{v(n)}$.

Fall 1 $x = v(n)$ (gut!)

Fall 2 $x \in A_n$.

Da $A_{v(n)} \supseteq A_n$ und $v(x) \notin A_{v(n)}$, gilt $v(x) \notin A_n$.

Darum $x \in S_n \stackrel{\text{Annahme}}{=} \{n\}$.

Also $x = n$.

Aber dann $v(x) = v(n) \in A_{v(n)}$.

Widerspruch!

Darum ist nur Fall 1 möglich.

D.h. $x = v(n)$.

$\implies \forall x \in S_{v(n)}: x = v(n)$ d.h. $S_{v(n)} \subseteq \{v(n)\}$

(ÜB 2, A2, Beh 1, 2)

≥:

Wir müssen zeigen, dass
 $m := v(n) \in S_{v(n)}$.

Da $m = v(n) \in A_{v(n)}$,
reicht es aus zu zeigen,
dass $v(m) \notin A_{v(n)}$ ($\stackrel{\text{Def.}}{=} A_n \cup \{v(n)\}$)

a. Da $v(k) \neq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$
(siehe [VL, Seite 16]),
gilt $v(m) = v(v(n)) \neq v(n)$.
Also $v(m) \notin \{v(n)\}$.

Nebenargument Seien $k, l \in \mathbb{N}$.
Wenn $v(k) \in A_l$, dann laut [VL, Seite 19]
gilt $(k \in A_k \subseteq A_k \cup \{v(k)\} =) A_{v(k)} \subseteq A_l$.
Also $k \in A_l$. D.h. $\forall k, l \in \mathbb{N}: v(k) \in A_l \Rightarrow k \in A_l$.

b. Also, aus $v(m) \in A_n$ würde
 $(v(n) =) m \in A_n$ folgen.

Da $n \in L$, ist dies unmöglich.

$$a + b \implies v(m) \notin A_n \cup \{v(n)\} \stackrel{\text{Konstr.}}{=} A_{v(n)}$$

$$\implies v(n) \in A_{v(n)}$$

$$\text{und } (v(v(n)) =) v(m) \notin A_{v(n)}$$

$$\stackrel{\text{Konstr. von } S}{\implies} v(n) \in S_{v(n)}$$

$$\implies \{v(n)\} \subseteq S_{v(n)}$$

Aus den \subseteq + \supseteq Teilargumenten
folgt $S_{v(n)} = \{v(n)\}$.
Daher $v(n) \in L$.

Daher gilt 2.

Aus 1 + 2 folgt die Behauptung.

□ (Beh.)

Beh 2. (N, e, v) erfülle $P1+P2$.

Sei \leq auf N wie folgt definiert:

$$x \leq y : \Leftrightarrow A_x \subseteq A_y.$$

Dann ist (N, \leq) eine OR.

Beweis

Reflexiv Sei $x \in N$ bel. Dann $A_x = A_x$
und damit $A_x \subseteq A_x$, woraus
sich $x \leq x$ ergibt.

Transitiv Seien $x, y, z \in N$. Dann

$$\begin{array}{l} x \leq y \text{ und } y \leq z \\ \xRightarrow{\text{Kontr.}} A_x \subseteq A_y \text{ und } A_y \subseteq A_z \end{array}$$

$$\Rightarrow A_x \subseteq A_z$$

$$\xRightarrow{\text{Kontr.}} x \leq z.$$

Antisymmetrie

Seien $x, y \in N$.

Angenommen, $x \leq y$ und $y \leq x$.
Dann $A_x \subseteq A_y$ und $A_y \subseteq A_x$.

Also $A_x = A_y =: B$.

Laut Beh 1 wissen wir, dass $L \subseteq N$
induktiv ist. Da (N, e, v) $P2$ genügt,
folgt $L = N$.

$$\Rightarrow x, y \in L$$

$\Rightarrow x$ ist das einzige El. in A_x mit $v(x) \notin A_x$
und y " " " " " " A_y " $v(y) \notin A_y$

$\Rightarrow x$ ist das einzige El. in B mit $v(x) \notin B$
und y " " " " " " B " $v(y) \notin B$

$\Rightarrow x = y$, weil beide eindeutig
die o.s. Eigenschaft besitzen.

□ (Beh.)

ÜB2 A3

Beh 3. (N, e, v) erfülle P1 + P2. Dann

$$\forall n \in N: \left(\exists \text{ Bijektion, } f: A_k \rightarrow A_n \right) \Leftrightarrow k = n$$

Beweis Setze

$$L := \{n \in N \mid \forall k \in N: P(k, n) \Leftrightarrow k = n\}$$

Da (N, e, v) P2 erfüllt, reicht es aus zu zeigen, dass L induktiv ist, woraus sich die Behauptung offensichtlich ergibt.

e ∈ L: Sei $k \in N$ beliebig. $\exists: P(k, e) \Leftrightarrow k = e$

←: Wenn $k = e$, dann gilt $P(k, e)$, weil $f = \text{id}_{A_e}$ eine Bijektion zwischen $A_k = A_e$ und A_e ist.

⇒: Angenommen, $P(k, e)$ gelte. D.h. eine Bijektion, $f: A_k \rightarrow A_e$ existiert. Da $e, k \in A_k$ und $A_e = \{e\}$, gilt $f(k) = e = f(e)$, und damit gilt $k = e$, da f injektiv ist.

Daher e ∈ L.

$n \rightarrow v(n)$ Sei $n \in L$ beliebig. (6)

Wir müssen zeigen, dass $v(n) \in L$.

Sei $k \in N$ beliebig. $\exists: P(k, v(n)) \Leftrightarrow k = v(n)$

←: Angenommen, $k = v(n)$, dann, da id_{A_k} eine Bij. zw. A_k und $A_k = A_{v(n)}$ gilt $P(k, v(n))$.

⇒: Angenommen, $P(k, v(n))$ gelte. Dann existiert eine Bijektion

$$f: A_k \rightarrow A_{v(n)}$$

[Ansatz: zeige, dass $k = v(k')$ für ein $k' \in N$. Dann konstruiere Bij. zw. A_k und A_n . Aus IV folgt $k' = n$ und damit $k = v(n)$.]

Beh 3a
Bew. Da $\text{Bild}(v) = N \setminus \{e\}$, gilt $v(n) \neq e$. Da $e \in L$ folgt hieraus dass keine Bijektion zw. $A_{v(n)}$ und A_e existiert. Da A_k und $A_{v(n)}$ bijektiv äquivalent sind (A), gibt es ebenfalls keine Bij. zw. A_k und A_e . Wieder, da $e \in L$, folgt hieraus, dass $k \neq e$. □ (Beh 3a)

Da also $k \neq e$ und $v: N \rightarrow N \setminus \{e\}$ surjektiv ist, existiert $k' \in N$ mit $v(k') = k$.

Beh. 3b

$\exists f': A_{v(k')} \rightarrow A_{v(n)}$
 bijektiv mit $f'(v(k')) = v(n)$.

Bew.

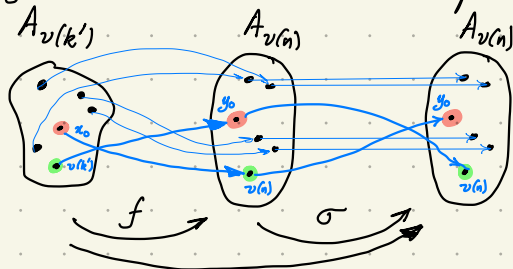
Setze $y_0 := f(v(k'))$.

Falls $y_0 = v(n)$, so erfüllt $f := f$ die Behauptung.

Falls $y_0 \neq v(n)$, sei

$$\sigma: A_{v(n)} \rightarrow A_{v(n)}$$

die (bijektive!) Permutation auf $A_{v(n)}$, die y_0 und $v(n)$ tauscht und sonst alles fixiert. Betrachte die Komposition:



$$f' := \sigma \circ f: A_{v(k')} \rightarrow A_{v(n)}$$

Als Komposition zweier Bijektionen ist f' bijektiv und per Konstruktion gilt:

$$f'(v(k')) = \sigma(y_0) = v(n).$$

□ (Beh. 3b)

Wegen **Beh 3b** können wir o. E. f durch f' ersetzen und annehmen, dass $f(v(k')) = v(n)$ erfüllt ist.

Setze nun $g := f|_{A_{k'}}$

Dann ist g eine injektive Abbildung (weil f injektiv ist) mit $\text{Dom}(g) = A_{k'}$ und

$$\text{Bild}(g) = f(A_{k'})$$

$$\begin{aligned} \text{da } f \text{ inj} & \quad \star \\ & = f(A_{v(k')} \setminus \{v(k')\}) \\ \text{da } f \text{ surj} & \quad \star \\ & = f(A_{v(k')} \setminus f(\{v(k')\})) \\ & = A_{v(n)} \setminus \{v(n)\} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{wegen } \star} \\ & = A_n \end{aligned}$$

Nebenargument:

Für $l \in \mathbb{N}$ gilt laut **A2** $v(l) \notin A_l$, sodass $A_{v(l)} = A_l \cup \{v(l)\}$ eine disj. Vereinigung ist. Wegen Disjunktheit gilt also $A_l = A_{v(l)} \setminus \{v(l)\}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Darum ist g eine Bijektion zw. $A_{k'}$ und A_n . Also gilt $P(k', n)$. Da $n \in L$ gilt $k' = n$ und damit $k = v(k') = n$.

□ (←)

Also wurde $\forall k \in \mathbb{N}: P(k, v(n)) \Leftrightarrow k = v(n)$ gezeigt.

Also $v(n) \in L$.

Also wurde $\forall n \in L: v(n) \in L$ gezeigt.

Also haben wir bewiesen, dass L induktiv ist

Wie oben erklärt folgt daraus die Behauptung. \square (Beh 3)

ÜB2 A4

(Skizze)

IA: $f(0) = 0 = 2^0 - 1$
 $f(1) = 3 = 2^1 + 1$

IV. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen
 $\forall k \in \mathbb{N}_0: k \leq n \Rightarrow f(k) = \begin{cases} 2^k - 1 & : k \text{ ger.} \\ 2^k + 1 & : k \text{ unger.} \end{cases}$

Fall 1 $n+1$ gerade
Dann $f(n+1) \stackrel{\text{Konstr.}}{=} f(n) + 2f(n-1)$
 $\stackrel{\text{IV}}{=} (2^n + 1) + 2(2^{n-1} - 1)$
 $= 2 \cdot 2^n + 1 - 2$
 $= 2^{n+1} - 1$

Fall 2 $n+1$ ungerade
Dann $f(n+1) \stackrel{\text{Konstr.}}{=} f(n) + 2f(n-1)$
 $\stackrel{\text{IV}}{=} (2^n - 1) + 2(2^{n-1} + 1)$
 $= 2 \cdot 2^n - 1 + 2$
 $= 2^{n+1} + 1$

Also gilt die Aussage für $n+1$.
Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ □