Ana I, Woche 7 Übung

25. Nov 2021

Agenda

Orga: Präsenz/online, Abgaben

ÜB4: A1: in ÜG + teilweise hier.
A2: (a) — hier im Dokument
(b)+(c) in ÜG
A4: wurde präsentiert, auch hier.

Zu ÜB6:
- lim sup / lim inf Konzept
- A4 diskutiert (ähnliche Aufgabe)

0

ÜB4 A1

	inf	sup	min	max
M_1	1	$\nexists$	1	$\nexists$
M_2	$\nexists$	1	$\nexists$	$\nexists$
M_3	$-\sqrt{42}$	$+\sqrt{42}$	$\nexists$	$\nexists$

Beobachtung

$M_1 = [1, \infty)$

$M_2 = (-\infty, 1)$

$M_3 = (-\sqrt{42}, \sqrt{42})$

A1 a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

1

Inf Beh. $\inf M_1$ existiert, viz. $\inf M_1 = 1$.

Bew untere Schr. Für $x \in M_1$ gilt per Konstr., dass $x \geq 1$. Darum ist 1 eine u. Schr. von M_1.
größte u. Schr. Sei $r \in \mathbb{R}$ eine bel. u. Schr. von M_1
Z: $1 \geq r$. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann $r > 1$. Wegen Dichtheit existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $r > x > 1$. Insbesondere gilt $x \in M_1$ per Konstruktion. Da r eine u. Schr von M_1 und $x \in M_1$, gilt $x \geq r$. Widerspruch! Darum muss $1 \geq r$ gelten.

$\Longrightarrow$ 1 ist die größte u. Schr. von M_1

$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}$ $\inf M_1 = 1$ $\square$ (Beh)

Min Bel. $\min M_1$ existiert, viz. $\min M_1 = 1$

Bew. Da $\inf M_1 = 1 \in M_1$, folgt dann $1 \in M_1$ das kleinste Element in M_1 ist. $\square$ (Beh)

(das war übertrieben, aber nur um den Punkt klar zu machen, dass $s' > s$)

Sup + Max Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei $s' := \max\{s, 1\} + 10000$.
Dann $s' > s$ und $s' \leq 1$, sodass $s' \in M_1$. Folglich kann kein $s \in \mathbb{R}$ obere Schranke von M_1 sein. Darum existiert für M_1 weder Supremum noch Maximum.

ÜB4 A1 b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Inf + Min Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei $r' := \min\{r, 1\} - 1$. Dann $r' < r$ und $r' < 1$, sodass $r' \in M_2$. Folglich kann kein $r \in \mathbb{R}$ untere Schranke von M_2 sein. Darum existiert für M_2 weder Infimum noch Minimum.

Sup Beh. $\sup M_2$ existiert, viz. $\sup M_2 = 1$.

Bew obere Schr. für $x \in M_2$ gilt per Konstr., dass $x < 1$. Darum ist 1 eine o. Schr. von M_2.

kleinste o. Schr. Sei $s \in \mathbb{R}$ eine bel. o. Schr. von M_2.

Z: $1 \leq s$. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann $s < 1$. Wegen Dichtheit existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $s < x < 1$. Insbesondere gilt $x \in M_2$ per Konstruktion. Da s eine o. Schr. von M_2 und $x \in M_2$, gilt $x \leq s$. Widerspruch! Darum muss $1 \leq s$ gelten.

$\Longrightarrow$ 1 ist die kleinste o. Schr. von M_2

$\xRightarrow{\text{Def.}}$ $\sup M_2 = 1$ □ (Beh)

Max Da $\sup M_2 = 1 \notin M_2$, existiert in M_2 kein größtes Element. (Alternativ: Sei $x \in M_2$ beliebig $\xRightarrow{\text{Konstr.}} x < 1 \xRightarrow{\text{Dichtheit}}$ ex. $x' \in (x, 1) \Rightarrow x' \in M_2$ und $x' > x \Rightarrow x \neq \text{Max}$)
Darum existiert kein Maximum für M_2.

A1 c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 42\}$.

2

Lemma Für $s, t \in [0, \infty)$ gilt
$$s < t \iff s^2 < t^2.$$

Beweis Da $s, t \geq 0$, gilt $s + t \geq 0$. Falls $s > 0$ od. $t > 0$, so gilt $s + t = \min\{s,t\} + \max\{s,t\} \geq 0 + \max\{s,t\} > 0$.

Fall 1 $s + t = 0$. Dann muss laut o.s. Beobachtung $s, t = 0$ gelten. Dann gelten weder $s < t$ noch $s^2 < t^2$, sodass die Doppelimplikation trivialerweise gilt.

Fall 2 $s + t > 0$. Beobachte:
$$t^2 - s^2 = (s+t)(t-s).$$
Da $s + t > 0$, erhält man aus dieser Gleichung:
$$t^2 - s^2 > 0 \iff t - s > 0.$$
Daraus folgt
$$t^2 > s^2 \iff t > s.$$
□ (Lemma)

Aufgrund dieses Lemmas gilt
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \sqrt{42}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{42} < x < \sqrt{42}\}.$$

Mittels ähnlicher Argumente für M_1, M_2 erhält man:

$\inf M_3 = -\sqrt{42} \notin M_3$, $\Rightarrow$ min M_3 ex. nicht

$\sup M_3 = +\sqrt{42} \notin M_3$, $\Rightarrow$ max M_3 ex. nicht.

ÜB4 A2

a) **Beh.** Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt.
Dann $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Bew.

Fall 1 $A = \emptyset$. Dann $A+B = \emptyset$.
Also $\inf(A+B) = \inf \emptyset = \infty$
$\inf A + \inf B = \inf \emptyset + \underbrace{\inf B}_{\in (-\infty, \infty]} = \infty$

also gilt $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Fall 2 $B = \emptyset$. Analog zu Fall 1 gilt
$\inf(A+B) = \infty = \inf A + \inf B$.

Fall 3 A, B nicht leer. Da A bzw. B nach unten beschränkt sind (durch, sagen wir, α bzw. β in $\mathbb{R}$), existieren $\inf A$, $\inf B$.
Für $a \in A$, $b \in B$ gilt $a + b \geq \alpha + \beta$.
Darum ist $A+B$ (nicht leer und) nach unten beschränkt, und zwar durch $\alpha + \beta$.
Oben hätten wir nun $\alpha := \inf A$ und $\beta := \inf B$ wählen können, sodass, da $\alpha + \beta$ eine u. Schr. von $A+B$ ist, $\inf(A+B) \geq \alpha + \beta = \inf A + \inf B$

gilt. Es bleibt, die andere Richtung ($\leq$) zu zeigen:

Ansatz 1 (direkt)

Per Definition des Inf von $A+B$ gilt nun
$\forall a \in A : \forall b \in B : \quad \inf(A+B) \leq a + b$

$\Longrightarrow \forall a \in A : \forall b \in B : -a + \inf(A+B) \leq b$

$\Longrightarrow \forall a \in A : -a + \inf(A+B)$ u. Schr. von B

Def$^{\text{n}}$ $\inf B$

$\Longrightarrow \forall a \in A : \quad -a + \underbrace{\inf(A+B)}_{\text{existiert in } \mathbb{R}} \leq \underbrace{\inf B}_{\text{existiert in } \mathbb{R}}$

$\Longrightarrow \forall a \in A : \quad \inf(A+B) - \inf B \leq a$

Def$^{\text{n}}$ $\inf A$

$\Longrightarrow \inf(A+B) - \inf(B) \leq \inf(A)$

$\Longrightarrow \inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B)$

4

Ansatz 2 (indirekt)

Ansatz 3 (ε-Argument)

ÜB4 A4

Sei $M := \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \le 2\} \subseteq \mathbb{Q}$.

Behauptung A4. Innerhalb $(\mathbb{Q},<)$ existiert kein Supremum von M.

Struktur des Arguments.

Schritt 1 Zeige: falls $\sup M$ doch in $\mathbb{Q}$ existiert, dann gilt für

$s := \sup M \in \mathbb{Q}$,

dann $s^2 = 2$.

Schritt 2 Zeige: es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. (✓ gilt, weil $\sqrt{2}$ irrational ist.)

Aus Schritten 1+2 folgt, dass kein Supremum von M in $\mathbb{Q}$ existier.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Behauptung in **Schritt 1** gilt. Hierfür gibt es mindestens zwei Ansätze.

5

Sei also $s \in \mathbb{Q}$ mit $s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{Q},<)$. **Z**: $s^2 = 2$

Beobachte zunächst: $1 \in \mathbb{Q}$ und $1^2 = 1 \le 2$, also $0 \in M$, also $s \ge 1 > 0$, da s o. Schr. von M ist.

Ansatz 1 Wir zeigen, dass $s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{R},<)$. Hierfür brauchen wir ein Lemma:

Lemma. Sei $(X,<)$ eine (totale) Ordnungsrelation und $D \subseteq X$ eine ordnungsdichte Teilmenge (z.B. $X = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{Q}$).
Seien $A \subseteq D$ und $\alpha \in D$. Dann

$\alpha = \sup A$ innerhalb $(D,<)$

$\Longrightarrow$ $\alpha = \sup A$ innerhalb $(X,<)$.

Bew Da $\alpha = \sup A$ in $(D,<)$, so ist innerhalb $(D,<)$ α eine o. Schr. von A. (Δ)
Dies bleibt innerhalb $(X,<)$ wahr.

Sei nun $\alpha' \in X$ mit $\alpha' < \alpha$.
Da D ordnungsdicht in X ist, existiert $\alpha'' \in D$ mit $\alpha' < \alpha'' < \alpha$. *
Da α das Sup innerhalb $(D,<)$ von A ist, existiert $x \in A$ mit $\alpha'' < x \le \alpha$. **
Also gilt $\alpha' < x \le \alpha$ wegen * + **.

$\Longrightarrow \forall \alpha' \in X : (\alpha' < \alpha \Rightarrow \exists x \in A \text{ mit } \alpha' < x)$ (†)

Aus (Δ) + (†) folgt $\alpha = \sup A$ innerhalb $(X,<)$ □ (Lemma)

Der Umkehrschluss ist trivialerweise auch wahr. Aber wir benötigen lediglich die $\Longrightarrow$-Richtung für unsere Zwecke.

Da $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R},<)$ dicht ist und $M \subseteq \mathbb{Q}$ und $s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{Q},<)$ dem **Lemma** zufolge gilt

(††) $\quad s = \sup M$ innerhalb $(\mathbb{R},<)$.

Da wir wissen, dass $s > 0$, folgt aus (††), dass

berechnet in $(\mathbb{R},<)$:

$$
\begin{aligned}
s &= \sup \{q \in M \mid q \geq 0\} \\
&= \sup \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q,\ q^2 \leq 2\} \\
&= \sup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \in [0,\sqrt{2}]\} \\
&= \sup\, [0,\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

Da $\mathbb{Q}$ in $(\mathbb{R},<)$ dicht ist, gilt $\sup I = \sup I \cap \mathbb{Q}$ für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ von positiver Länge.

(weiteres **Lemma** nötig!)

Darum $s = \sup\,[0,\sqrt{2}] = \sqrt{2}$.

Also $s^2 = \sqrt{2}^2 = 2$. $\square$ (Ansatz I)

6

Ansatz II Es reicht aus $s^2 < 2$ und $s^2 > 2$ auszuschließen.

Fall 1 $\quad s^2 < 2$. Sei $\overbrace{q := 2 - s^2}^{*} \in \mathbb{Q}^+$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ mit
1) $\varepsilon \leq 1$
2) $(2s+1)\,\varepsilon \leq \frac{q}{2}$

z.B. $\quad \varepsilon := \min\left\{1, \frac{q}{2(2s+1)}\right\}$ in $\mathbb{Q}^+$, da $s, q \in \mathbb{Q}$ und $q > 0$ und $s > 0$

Setze $\quad s' := s + \varepsilon$.

Dann $s' \in \mathbb{Q}$ und $s' > s$ (da $\varepsilon > 0$).

Es gilt

$$
\begin{aligned}
s'^2 &= s^2 + 2\varepsilon \cdot s + \varepsilon^2 \\
&\overset{*}{=} 2 - q + \varepsilon \cdot (2s + \varepsilon) \\
&\leq 2 - q + \varepsilon \cdot (2s+1) && \text{da } \varepsilon > 0 \text{ und wegen } 1 \\
&\leq 2 - q + q/2 && \text{wegen } 2 \\
&< 2
\end{aligned}
$$

Also $s' \in \mathbb{Q}$ und $s'^2 < 2$.

Also $s' \in M$.

Also $s = \sup M \geq s'$.

Dies ist ein Widerspruch!

Darum ist Fall 1 ausgeschlossen.

Fall 2 $s^2 > 2$. Sei $\overbrace{q := s^2 - 2}^{**} \in \mathbb{Q}^+$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ mit **3)** $s - \varepsilon \geq 0$

4) $2s\varepsilon < q$.

z.B. $\varepsilon := \min\{\underbrace{s}_{>0}, \frac{q}{4s}\}$ in $\mathbb{Q}^+$, da $s, q \in \mathbb{Q}$ und $q > 0$ und $s > 0$

Setze $s' := s - \varepsilon$

Dann $s' \in \mathbb{Q}$ und $0 \leq s' < s$ wegen **3** und da $\varepsilon > 0$.

Da $s = \sup M$ und $s' < s$, existiert ein $q^* \in M$ mit $s' < q^* \leq s$.

Da $s' \geq 0$ gilt auch $q^* \geq 0$.

Da $x \in \mathbb{Q}_0^+ \longmapsto x^2$ monoton ist, folgt

$s'^2 \leq q^{*2}$

$\Longrightarrow s'^2 \leq 2$, da $q^* \in M$ und damit $q^{*2} \leq 2$

$\Longrightarrow (s-\varepsilon)^2 \leq 2 \overset{**}{=} s^2 - q$

$\Longrightarrow s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \leq s^2 - q$

$\Longrightarrow 2s\varepsilon \geq q + \varepsilon^2 > q$ da $\varepsilon^2 > 0$

Dies ist ein Widerspruch!

Darum ist Fall 2 ausgeschlossen.

Da Fall 1 + Fall 2 ausgeschlossen sind, bleibt nur $s^2 = 2$ übrig.

$\square$ (Ansatz II)

Durch entweder Ansatz I od. II ist die Behauptung in **Schritt 1** unserer Argumentationsstruktur bewiesen.

Also funktioniert die Argumentation, und liefert, dass **Behauptung A4** gilt.

$\square$ (Beh. A4)

Bemerkung. Ansatz II hat den Vorteil, dass wir gar nichts über $\mathbb{R}$ oder $\sqrt{2}$ benötigen oder wissen müssen.

ÜB6 (Hinweise)

Bzgl. A4.

- Man kann aus der allgemeinen Aussage in (a) (d.h. „für alle Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ …") die Aussage in (b) erschließen.
  Dafür kann man aus den Folgen in (b) Folgen $(x'_n)_n, (y'_n)_n$ konstruieren, dann (a) anwenden, und die Ausdrücke dann umformen, so dass die Ungleichung in (b) entsteht. Doch wie?

- Aus (a) + (b) kann man durch ein wenig Arbeit (c) erschließen. Wie?

Ähnliche Aufgabe wie (a):

Behauptung. Seien $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ Folgen. Dann

$$\underbrace{\liminf_{n\to\infty} x_n + y_n}_{\gamma :=} \geq \underbrace{\liminf_{n\to\infty} x_n}_{\alpha :=} + \underbrace{\liminf_{n\to\infty} y_n}_{\beta :=}$$

solange es nicht der Fall ist, dass $\alpha = +\infty$ und $\beta = -\infty$ oder $\alpha = -\infty$ und $\beta = -\infty$.

Bew. Falls $\gamma = \pm\infty$ und entweder $\alpha = \gamma$ od. $\beta = \gamma$, dann l.S. $= \gamma =$ r.S. Es bleibt also nur die Fälle zu behandeln, bei denen diese Verhältnisse nicht vorliegen. $\ast$

Beobachte zunächst

$$\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} (x_k + y_k)}_{=: \gamma_n}$$

$$\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} x_k}_{=: \alpha_n}$$

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} y_k}_{=: \beta_n}$$

Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, \geq n : \; x_k + y_k \geq \alpha_n + \beta_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n + \beta_n \text{ u. Schr. von } \{x_k + y_k \mid k \geq n\}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \gamma_n = \inf\{x_k + y_k \mid k \geq n\} \geq \alpha_n + \beta_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \gamma \geq \gamma_n \geq \alpha_n + \beta_n$$

(wenden)

9

da $(\alpha_n)_n, (\beta_n)$ monoton steigende Folgen sind:

$$\Rightarrow \forall m,n \in \mathbb{N}: \gamma \geq \alpha_{\max\{m,n\}} + \beta_{\max\{m,n\}} \geq \alpha_m + \beta_n$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: \gamma - \alpha_m \geq \beta_n$$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \gamma - \alpha_m$ o. Schr. von $\{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \gamma - \alpha_m \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n = \beta$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \underbrace{\gamma - \beta} \geq \alpha_m$$

wohldefiniert, weil die Fälle $\infty - \infty$ und $(-\infty) - (-\infty)$ ausgeschlossen wurden (siehe ✱)

$\Rightarrow \gamma - \beta$ eine o. Schr. von $\{\alpha_m \mid m \in \mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow \gamma - \beta \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} \alpha_m = \alpha.$$

$$\Rightarrow \gamma \geq \underbrace{\alpha + \beta}$$

wohldefiniert weil per Voraussetzung $\infty + -\infty$ und $-\infty + \infty$ ausgeschlossen sind.

Darum gilt die Ungleichung $\square$