Ana I, Woche 3 Übung

28. Okt 2021

Blatt 1

Zu A4b lässt sich für $m \in \mathbb{N}$ beliebig vermuten, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1)\dots(n+m)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In der Tat lässt sich dies direkt zeigen (siehe rechts).

Für einen Beweis per Induktion:

IA: (trivial)

ISchr.:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \dots = \sum_{k=1}^{n} \dots + (n+1)\dots(n+m)$$

$$\overset{IV}{=} \frac{1}{m+1} n(n+1)\dots(n+m) + (n+1)\dots(n+m)$$

$$= \frac{1}{m+1}(n+(m+1))(n+1)\dots(n+m)$$

$$= \frac{1}{m+1}(n+1)\dots(n+1+m-1)(n+1+m)$$

$=$ Formel für $n+1$ //

A4b (Herleitung der Formel ohne Ind)

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig.

Dann für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$k(k+1)\dots(k+m-1)$$

$$= (k+m-1)!\,/\,(k-1)!$$

$$= m!\binom{m+k-1}{m}$$

Erinnerung (Pascals Δ)

$\forall r, n \in \mathbb{N}_0: \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

$\Rightarrow \forall r, n \in \mathbb{N}_0: \quad \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r} - \binom{n-1}{r}$

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{m+k-1}{m} = \binom{m+k}{m+1} - \binom{m+k-1}{m+1}$

Also ist die Reihe für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1) = m!\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{m}$$

$$= m!\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k}{m+1} - \binom{m+k-1}{m+1}$$

$$= m!\left(\binom{m+n}{m+1} - \underbrace{\binom{m}{m+1}}_{=0}\right)$$

$$= m!\,\frac{(m+n)!}{(m+1)!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{m+1} n(n+1)\dots(n+m) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

0