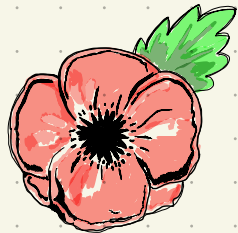


# Ana I, Woche 5 Übung

11. Nov 2021



## Agenda

Orga: - Takt:

ÜB2 + ÜB4

ODER

ÜB3 + ÜB4

diese Woche

- Masterlösungen??

ÜB2 (A3) od. ÜB3 (A1-3)

Zu ÜB4

- Begriffe ✓
- sup eindeutig (wenn  $\exists$ ) ✓
- $\sup c \cdot M = c \sup M$  ✓
- ↳ - Ansatz     $\exists$ -Ansatz
- $\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$  wenn ...

Definition Seien  $(K, \leq)$  eine  
(evtl. partielle) OR

und  $M \subseteq K$  und  $s \in K$ .

Dann schreiben wir

$$\sup M = s$$

$\Leftrightarrow$  1)  $s$  obere Schranke von  $M$   
d.h.  $\forall x \in M: x \leq s$

2)  $s$  minimal unter den oberen  
Schranken

d.h.  $\forall s' \in K:$   
 $s'$  o. Sch. von  $M \Rightarrow s \leq s'$

Satz Suprema sind eindeutig,  
wenn sie existieren.  
(Siehe VL.)

Infimum ( $\inf$ ) lässt sich analog  
definieren (siehe VL).

Lemma 1 Seien  $(K, \leq)$  eine total 1

OR und  $M \subseteq K$  und  $s \in K$ .

Dann

$$\sup M = s$$

$\Leftrightarrow$  1)  $s$  obere Schranke von  $M$

2)  $\forall s' \in K:$

$$s' < s \Rightarrow \exists m \in M: s' < m$$

Lemma 2 Seien  $K$  ein angeordneter

Körper und  $M \subseteq K$  und  $s \in K$ .

Dann

$$\sup M = s$$

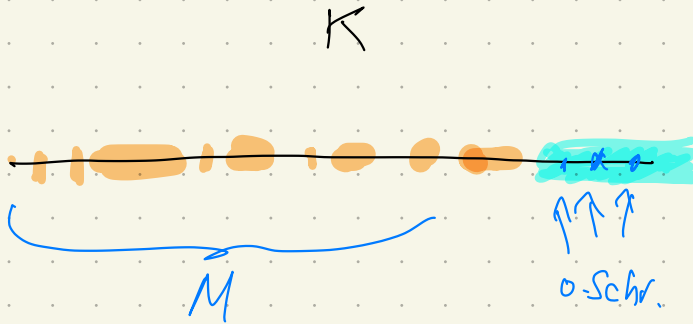
$\Leftrightarrow$  1)  $s$  obere Schranke von  $M$

2)  $\forall \varepsilon \in K^+: \exists m \in M: s - \varepsilon < m$

H/A: beweise diese Lemmata!

Anmerkung Wegen dieser Äquivalenzen  
sieht man in der Literatur  
oft unterschiedliche Varianten.

# Abb 1. Visualisierung von Sup



die Menge aller o. Schr. von M ist entweder

- 1)  $\emptyset$
- 2)  $[a, \infty)$   $a \in K$
- 3)  $(a, \infty)$   $a \in \overset{\text{K}}{?}$

# Beispiele

nicht leere

Sei  $K$  eine (totale) OR.

$M = \emptyset \Rightarrow \inf M = \max K (!)$   
 $\sup M = \min K (!)$   
 solange  $\max$  bzw.  $\min$  existiert, sonst ex.  $\inf$  bzw.  $\sup$  nicht.

$M = K \Rightarrow \inf M = \min K$   
 $\sup M = \max K$   
 solange ....

Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann existieren

$\min K$  und  $\max K$  und daraus existieren auch  $\inf \emptyset, \sup \emptyset, \inf K, \sup K$   
nicht.

nicht (wieso?)  
 $m-1 < m$   
 $s < s+1$

Definition Sei  $(K, \leq)$  eine

(ggf. partielle) OR.

Dann heißt  $K$  **ordnungsvollst.**  
(oder Dedekind-vollst.),

wenn

$\forall M \subseteq K$  **nicht leer**:

$M$  ist in  $K$  nach oben beschr.

(d.h.  $\exists a \in K: \forall x \in M: a \leq x$ )

$\Rightarrow \sup M$  existiert in  $K$ .

Lemma 3  $K$  ist ordnungsvollständig

gdw.  $\forall M \subseteq K$  **nicht leer**:

$M$  hat eine u. Schr in  $K$

$\Rightarrow \inf M$  existiert in  $K$ .

Behauptung 4 Seien  $K$  ein angeordneter

Körper,  $M \subseteq K$  nicht leer, und  $c \in K^+$  (d.h.  $c > 0$ ).

Angenommen, **A1.**  $K$  sei ordnungsvollst.

**A2.**  $M$  habe eine o. Schr.

Dann gelten

1)  $c \cdot M$  ist nicht leer und hat eine  
( $= \{c \cdot x \mid x \in M\}$ ) obere Schr.

2)  $\sup c \cdot M = c \cdot \sup M$

Beweis. **Zu 1:** Da  $M \neq \emptyset$ , ist  $c \cdot M \neq \emptyset$ .  
Sei  $s$  irgendeine

o. Schr. von  $M$  (ea. wegen A2)

Dann  $\forall m \in M: m \leq s$   
 $\stackrel{c > 0}{\Rightarrow} \forall m \in M: c \cdot m \leq c \cdot s$   
 $\Rightarrow \forall x \in c \cdot M: x \leq c \cdot s$   
d.h.  $c \cdot s$  o. Schr. von  $c \cdot M$

m. a. W.  $c \cdot M$  besitzt eine  
o. Schr.

Da  $K$  ordnungsvollst ist und  
 $M, c \cdot M$  nicht leer sind und obere Schr.

besitzen, existieren  $\sup M =: s_1$   
 $\sup c \cdot M =: s_2$

**Zu 2:** zu zeigen:  $s_2 = c \cdot s_1$

Weberargument \*

Sei  $s \in K$  beliebig.

$s$  ist o. Schr. von  $M$

$\Leftrightarrow \forall x \in M: x \leq s$

$\stackrel{c > 0}{\Leftrightarrow} \forall x \in M: c \cdot x \leq c \cdot s$

$\Leftrightarrow \forall x \in c \cdot M: x \leq c \cdot s$

$\Leftrightarrow c \cdot s$  ist o. Schr. von  $c \cdot M$

$\leq$ :  $s_1$  ist o. Schr. von  $M$

\*  $\implies c \cdot s_1$  o. Schr. von  $c \cdot M$

$\xrightarrow{\text{sup}} (s_2 =) \sup cM \leq c \cdot s_1$

$\geq$ :  $s_2 = c(c^{-1}s_2)$  ist o. Schr. von  $cM$

\*  $\implies c^{-1}s_2$  ist o. Schr. von  $M$

$\xrightarrow{\text{sup}} (s_1 =) \sup M \leq c^{-1}s_2$

$\xrightarrow{c>0} c \cdot s_1 \leq c \cdot c^{-1}s_2 = s_2$

Also gilt  $\sup cM = s_2 = c \cdot s_1 = c \cdot \sup M$   $\square$

### $\epsilon$ -Ansatz (für 2):

Wir zeigen dass

2.1)  $c \cdot s_1$  o. Schr. von  $c \cdot M$

2.2) für alle  $\epsilon \in K$  mit  $\epsilon > 0$   
ex.  $x \in cM$  s.d.

$c \cdot s_1 - \epsilon < x$

woraus sich ergeben wird, dass

$(c \cdot \sup M =) c \cdot s_1 = \sup c \cdot M.$

**Zu 2.1:** siehe Argument für 1).

**Zu 2.2:**

Sei  $\epsilon \in K^+$  beliebig.  $\int \begin{matrix} c > 0 \\ \implies c^{-1} > 0 \\ c^{-1} \cdot \epsilon > 0 \\ \implies c^{-1} \epsilon > 0 \end{matrix}$

Dann ist  $\epsilon' := c^{-1} \epsilon \in K^+$

Da  $s_1 = \sup M$ , existiert ein  $x' \in M$  s.d.

$s_1 - \epsilon' < x'$

$c > 0$

$\implies c s_1 - \epsilon = c \cdot s_1 - c \cdot \epsilon'$   
 $= c \cdot (s_1 - \epsilon')$

$< c \cdot x' =: x, \in cM$

$\implies \exists x \in cM: c s_1 - \epsilon < x.$

Aus 2.1 + 2.2 folgt wie oben erklärt

$c \cdot \sup M = \sup c \cdot M$   $\square$

## Behauptung 5

Sei  $K$  ein ordnungsvollst.  
angeordneter Körper.

Weiters seien  $A, B \subseteq K^+$   
nicht leere, nach oben beschränkte  
Teilmenge. Dann gilt

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Beweis. Da  $A, B$  nicht leer und  
nach oben beschr. sind und  $K$  ordnungsvollst. ist, ex.

$\sup A$  und  $\sup B$  in  $K$ .

$\alpha := \sup A$        $\beta := \sup B$

Da  $A, B$  nicht leer und  $\subseteq K^+$  sind, müssen  
 $\alpha, \beta > 0$  sein.

Für  $x \in A \cdot B$  gilt  $x = a \cdot b$  für ein  
 $a \in A$  und  $b \in B$ . Da  $A, B \subseteq K^+$  gilt

$$x = a \cdot b \leq \alpha \cdot b \leq \alpha \cdot \beta$$

da  $\alpha \leq \sup A = \alpha$   
und  $b \geq 0$

da  $b \leq \sup B = \beta$   
und  $\alpha \geq 0$

D.h.  $A \cdot B$  ist nach oben beschr., und zwar  
durch  $\alpha \cdot \beta$  \*

Da  $A, B \neq \emptyset$ , ist  $A \cdot B$  auch nicht leer.

Da  $A \cdot B \neq \emptyset$  nach oben beschr. ist  
und  $K$  ordnungsvollst. ist, ex.

$\sup A \cdot B$  in  $K$ .

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Wegen \* wissen wir bereits, dass  
 $\alpha \cdot \beta$  eine o. Schr. von  $A \cdot B$  ist, und  
damit, dass

$$\sup A \cdot B \leq \alpha \cdot \beta = \sup A \cdot \sup B$$

Um die  $\geq$ -Richtung zu zeigen  
beobachten per Definition des  $\sup A \cdot B$ :

(bitte wenden!)

$$\forall a \in A, b \in B: a \cdot b \leq \sup A \cdot B$$

$A \subseteq \mathbb{K}^+$

$$\Rightarrow \forall a \in A: \forall b \in B: b \leq a^{-1} \sup A \cdot B$$

Def:  $\sup B$

$$\Rightarrow \forall a \in A: \sup B \leq a^{-1} \cdot \sup A \cdot B$$

„kleinste o. Schr.“

$\sup B > 0$

$$\Rightarrow \forall a \in A: a \leq (\sup A \cdot B) (\sup B)^{-1}$$

Def:  $\sup A$

$$\Rightarrow \sup A \leq (\sup A \cdot B) (\sup B)^{-1}$$

„kleinste o. Schr.“

$\sup B > 0$

$$\Rightarrow \sup A \cdot \sup B \leq \sup (A \cdot B)$$

Also gilt  $\sup A \cdot \sup B = \sup A \cdot B$

