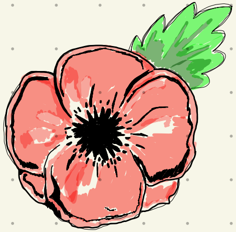
Ana I, Woche 5 Übung

11. Nov 2021



Agenda

Orga: – Takt: $\boxed{\text{ÜB2 + ÜB4}}$ ODER $\boxed{\text{ÜB3 + ÜB4}}$ diese Woche

– Musterlösungen??

ÜB2 (A3) od. **ÜB3** (A1–3)

Zu ÜB4
- Begriffe ✓
- Sup eindeutig (wenn $\exists$) ✓
- $\sup c \cdot M = c \sup M$ ✓

  $\leq$-Ansatz ε-Ansatz
- $\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$ wenn ...

Definition. Seien $(K, \leq)$ eine (evtl. partielle) OR und $M \subseteq K$ und $s \in K$.
Dann schreiben wir
$$\sup M = s$$
$:\Longleftrightarrow$ 1) s obere Schranke von M
d.h. $\forall x \in M: x \leq s$
2) s minimal unter den oberen Schranken
d.h. $\forall s' \in K$:
s' o. Schr. von $M \Rightarrow s \leq s'$

Satz Suprema sind eindeutig, wenn sie existieren. (Siehe VL.)

Infimum ($\inf$) lässt sich analog definieren (siehe VL).

Lemma 1 Seien $(K, \leq)$ eine totale OR und $M \subseteq K$ und $s \in K$.
Dann
$$\sup M = s$$
$\Longleftrightarrow$ 1) s obere Schranke von M
2) $\forall s' \in K$:
$s' < s \Rightarrow \exists m \in M: s' < m$

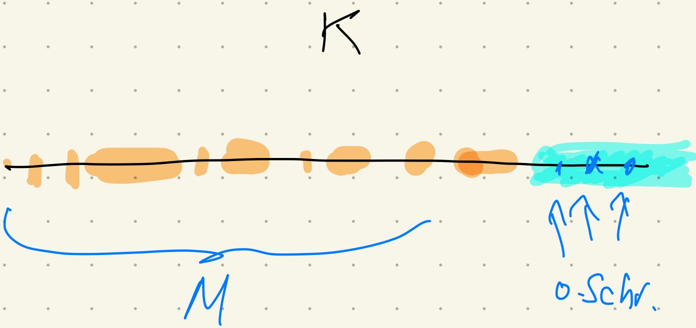
Lemma 2 Seien K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ und $s \in K$.
Dann
$$\sup M = s$$
$\Longleftrightarrow$ 1) s obere Schranke von M
2) $\forall \varepsilon \in K^+: \exists m \in M: s - \varepsilon < m$

HA: beweise diese Lemmata!

Anmerkung: wegen dieser Äquivalenzen sieht man in der Literatur oft unterschiedliche Varianten.

1

Abb 1. Visualisierung von Sup



die Menge aller o. Schr. von M
ist entweder

1) $\emptyset$
2) $[a, \infty)$ $\quad a \in K$
3) (a, ∞) $\quad a \in ??$ $\overline{K}$

Beispiele

Sei K eine (totale) OR. nicht leere

wieso?

$M = \emptyset \implies \inf M = \max K$ (!)
$\sup M = \min K$ (!)
solange max bzw. min existiert; sonst ex. inf bzw. sup nicht.

wieso?

$M = K \implies \inf M = \min K$
$\sup M = \max K$
solange ....

Sei K ein angeordneter Körper.
Dann existieren
$\min K$ und $\max K$ **nicht** (wieso?) $m-1<m$, $s<s+1$
und darum existieren auch
$\inf \emptyset, \sup \emptyset, \inf K, \sup K$
nicht.

Definition Sei $(K, \leq)$ eine (ggf. partielle) OR. Dann heißt K **ordnungsvollst.** (oder Dedekind-vollst.), wenn

$\forall M \subseteq K$ nicht leer:

M ist in K nach oben beschr. (d.h. $\exists a \in K : \forall x \in M : a \leq x$

$\implies \sup M$ existiert in K.

Lemma 3 K ist ordnungsvollständig gdw. $\forall M \subseteq K$ nicht leer:

M hat eine u. Schr in K

$\implies \inf M$ existiert in K.

Behauptung 4 Seien K ein angeordneter Körper, $M \subseteq K$, $c \in K^+$.
$(c > 0)$

Angenommen A1. K sei ordnungsvollst.

A2. M habe eine o. Schr.

Dann gelten

1) $c \cdot M$ hat eine o. Schr. $(= \{ cx \mid x \in M \})$

2) $\sup c \cdot M = c \cdot \sup M$

Beweis. **Zu 1:** Sei s eine o. Schr von M (ex. wegen A2)

Dann $\forall m \in M: \quad m \leq s$

$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \forall m \in M: \quad cm \leq cs$

$\Longrightarrow \forall x \in c \cdot M: \quad x \leq c \cdot s$

d.h. $c \cdot s$ o. Schr. von $c \cdot M$

m. a. W. $c \cdot M$ besitzt eine o. Schr.

4

Da K ordnungsvollst ist und $M, c \cdot M$ o. Schr. besitzen, existieren
$\sup M =: s_1$
$\sup c \cdot M =: s_2$

Zu 2: zu zeigen: $s_2 = c \cdot s_1$.

Nebenargument

Sei $s \in K$ beliebig.

s ist o. Schr. von M

$\iff \forall x \in M: \quad x \leq s$

$\overset{c>0}{\iff} \forall x \in M: \quad cx \leq cs$

$\iff \forall x \in cM: \quad x \leq cs$

$\iff cs$ ist o. Schr. von $c \cdot M$

$\leq$: s_1 ist o. Schr. von M

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ cs_1 o. Schr. von $c\cdot M$

$\overset{\sup}{\Longrightarrow}$ $(s_2 \Rightarrow)\ \sup cM \leq c\cdot s_1$

$\geq$: $s_2 = c(c^{-1}s_2)$ ist o. Schr von cM

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ $c^{-1}s_2$ ist o. Schr. von M

$\overset{\sup}{\Longrightarrow}$ $(s_1 \Rightarrow)\ \sup M \leq c^{-1}s_2$

$\overset{c>0}{\Longrightarrow}$ $c\cdot s_1 \leq c\cdot c^{-1}s_2 = s_2$

Also gilt $\underline{\sup cM = s_2 = c\cdot s_1 = c\cdot \sup M}$ $\square$

ε-Ansatz (für 2)):

Wir zeigen dass

2.1) $c\cdot s_1$ o. Schr von $c\cdot M$

2.2) für alle $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$ ex. $x \in cM$ s.d.

$$c\cdot s_1 - \varepsilon < x$$

woraus sich ergeben wird, dass

$$(c\cdot \sup M \Rightarrow)\ c\cdot s_1 = \sup c\cdot M.$$

Zu 2.1: siehe Argument für **1)**.

Zu 2.2:

Sei $\varepsilon \in K^+$ beliebig. $c>0 \Rightarrow c^{-1}>0$; $c^{-1}, \varepsilon > 0 \Rightarrow c^{-1}\varepsilon > 0$

Dann ist $\varepsilon' := c^{-1}\varepsilon \in K^+$

Da $s_1 = \sup M$, existiert ein $x' \in M$ s.d.

$$s_1 - \varepsilon' < x'$$

$$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \quad cs_1 - \varepsilon = c\cdot s_1 - c\cdot\varepsilon'$$
$$= c\cdot(s_1 - \varepsilon')$$
$$< c\cdot x' =: x,\ \in c\cdot M$$

$\Longrightarrow \exists x \in c\cdot M:\ cs_1 - \varepsilon < x.$

aus **2.1** + **2.2** folgt wie oben erklärt

$$c\cdot \sup M = \sup c\cdot M$$ $\square$

Behauptung 5 Sei K ein ornungsvollst. angeordneter Körper.

Weiters seien $A, B \subseteq K^+$ nicht leere, nach oben beschränkte Teilmengen. Dann gilt

$$\sup A \cdot B = \text{su } A \cdot \sup B.$$

Beweis. Da A, B nach oben beschr. sind und K ordnungsvollst. ist, ex. $\underbrace{\sup A}_{\alpha :=}$ und $\underbrace{\sup B}_{\beta :=}$ in K.

Da A, B nicht leer und $\subseteq K^+$ sind, müssen $\alpha, \beta > 0$ sein.

Für $x \in A \cdot B$ gilt $x = a \cdot b$ für ein $a \in A$ und $b \in B$. Da $A, B \subseteq K^+$ gilt

$$x = a \cdot b \leq \alpha \cdot b \leq \alpha \cdot \beta$$

da $a \leq \sup A = \alpha$ und $b \geq 0$

da $b \leq \sup B = \beta$ und $\alpha \geq 0$

D.h. $A \cdot B$ ist nach oben beschr., und zwar durch $\alpha \cdot \beta$ ✱

Da $A \cdot B$ nach oben beschr. ist und K ordnungsvollst. ist, ex.

$$\sup A \cdot B \text{ in } K.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Wegen ✱ wissen wir bereits, dass $\alpha \cdot \beta$ eine o. Schr. von $A B$ ist, und damit, dass

$$\sup A \cdot B \leq \alpha \cdot \beta = \sup A \cdot \sup B$$

Um die $\geq$-Richtung zu zeigen beobachten per Definition des $\sup A \cdot B$:

(bitte wenden!)

$$\forall a \in A, b \in B: \quad a \cdot b \leq \sup A \cdot B$$

$A \subseteq K^+$

$$\Longrightarrow \forall a \in A: \quad \forall b \in B: \quad b \leq a^{-1} \sup A \cdot B$$

Def^n sup B

„kleinste o. Schr."

$$\Longrightarrow \quad \forall a \in A: \quad \sup B \leq a^{-1} \cdot \sup AB$$

$\sup B > 0$

$$\Longrightarrow \quad \forall a \in A: \quad a \leq (\sup A \cdot B)(\sup B)^{-1}$$

Def^n sup A

„kleinste o. Schr."

$$\Longrightarrow \quad \sup A \leq (\sup A \cdot B)(\sup B)^{-1}$$

$\sup B > 0$

$$\Longrightarrow \quad \sup A \cdot \sup B \leq \sup (A \cdot B)$$

Also gilt $\sup A \cdot \sup B = \sup A \cdot B$

$\square$