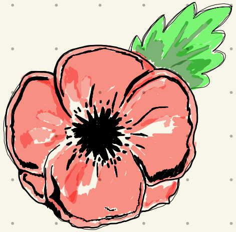
Ana I, Woche 5 Übung

11. Nov 2021



Agenda

Orga: – Takt: $\boxed{\text{ÜB2 + ÜB4}}$ ODER $\boxed{\text{ÜB3 + ÜB4}}$ } diese Woche

– Musterlösungen??

ÜB2 (A3) **od.** **ÜB3** (A1–3)

Zu ÜB4 – Begriffe ✓

– Sup eindeutig (wenn $\exists$) ✓

– $\sup c\cdot M = c \sup M$ ✓

$\leq$-Ansatz ε-Ansatz

– $\sup A\cdot B = \sup A \cdot \sup B$ wenn ...

Definition Seien $(K, \leq)$ eine (evtl. partielle) OR und $M \subseteq K$ und $s \in K$.
Dann schreiben wir

$$\sup M = s$$

$:\Longleftrightarrow$ 1) s obere Schranke von M
d.h. $\forall x \in M: x \leq s$
2) s minimal unter den oberen Schranken
d.h. $\forall s' \in K$:
s' o. Schr. von $M \Rightarrow s \leq s'$

Satz Suprema sind eindeutig, wenn sie existieren.
(Siehe VL.)

Infimum (inf) lässt sich analog definieren (siehe VL).

Lemma 1 Seien $(K, \leq)$ eine totale OR und $M \subseteq K$ und $s \in K$. 1
Dann

$$\sup M = s$$

$\Longleftrightarrow$ 1) s obere Schranke von M
2) $\forall s' \in K$:
$s' < s \Rightarrow \exists m \in M: s' < m$

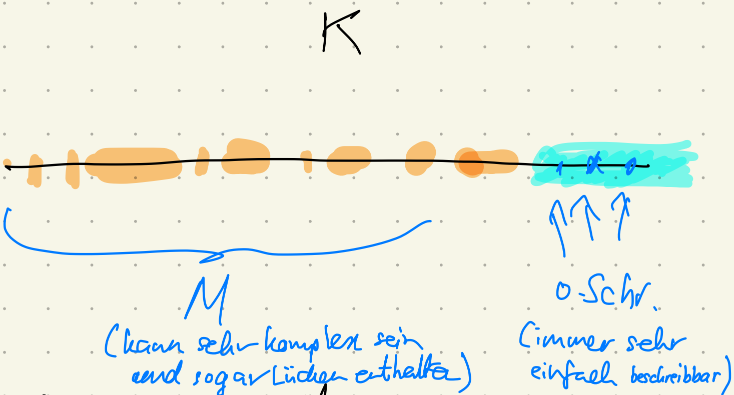
Lemma 2 Seien K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ und $s \in K$.
Dann

$$\sup M = s$$

$\Longleftrightarrow$ 1) s obere Schranke von M
2) $\forall \varepsilon \in K^+: \exists m \in M: s - \varepsilon < m$

HA: beweise diese Lemmata !
Anmerkung wegen dieser Äquivalenzen sieht man in der Literatur oft unterschiedliche Varianten.

Abb 1. Visualisierung von Sup



Die Menge aller o. Schr. von M ist genau eine der folgenden:

1) $\emptyset$ (wenn $\nexists$ o. Schr von M)
2) $[a, \infty)$ für ein $a \in K$
3) $(a, \infty)_{\bar{K}} \cap K$ für ein $a \in \bar{K} \setminus K$

wobei $\bar{K}$ = **Dedekind-Vervollst.** von $(K, \leq)$

Beispiele

Sei K eine nicht leere (totale) OR.

wieso?

$M = \emptyset \implies \inf M = \max K$ (!)
$\sup M = \min K$ (!)
solange max bzw. min existiert; sonst ex. inf bzw. sup nicht.

wieso?

$M = K \implies \inf M = \min K$
$\sup M = \max K$
solange ....

Sei K ein angeordneter Körper.
Dann existieren
$\min K$ und $\max K$ **nicht** (wieso?)
und darum existieren auch
$\inf \emptyset, \sup \emptyset, \inf K, \sup K$
nicht.

$m - 1 < m$
$s < s+1$

Definition Sei $(K, \leq)$ eine (ggf. partielle) OR.
Dann heißt K **ordnungsvollst.** (oder Dedekind-vollst.),
wenn $\forall M \subseteq K$ nicht leer:

M ist in K nach oben beschr.
(d.h. $\exists a \in K : \forall x \in M : x \leq a$)
$\Longrightarrow$ $\sup M$ existiert in K.

Lemma 3 K ist ordnungsvollständig
gdw. $\forall M \subseteq K$ nicht leer:

M hat eine u. Schr in K
$\Longrightarrow$ $\inf M$ existiert in K.

Behauptung 4 Seien K ein angeordneter Körper, $M \subseteq K$ nicht leer, und $c \in K^+$ (d.h. $c > 0$).
Angenommen, **A1.** K sei ordnungsvollst.
A2. M habe eine o. Schr.

Dann gelten
1) $c \cdot M$ ist nicht leer und hat eine obere Schr.
$(= \{ cx \mid x \in M \})$

2) $\sup c \cdot M = c \cdot \sup M$

Beweis. **Zu 1:** Da $M \neq \emptyset$, ist $c M \neq \emptyset$. Sei s irgendeine o. Schr von M (ex. wegen A2)

Dann $\forall m \in M: \quad m \leq s$

$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \forall m \in M: \quad cm \leq cs$

$\Longrightarrow \forall x \in c \cdot M: \quad x \leq c \cdot s$

d.h. $c \cdot s$ o. Schr. von $c \cdot M$

m.a.W. $c \cdot M$ besitzt eine o. Schr.

Da K ordnungsvollst ist und M, $c \cdot M$ nicht leer sind und obere Schr. besitzen, existieren $\sup M =: s_1$
$\sup c \cdot M =: s_2$

Zu 2: zu zeigen: $s_2 = c \cdot s_1$.

Nebenargument *

Sei $s \in K$ beliebig.

s ist o. Schr. von M

$\Longleftrightarrow \forall x \in M: \quad x \leq s$

$\overset{c>0}{\Longleftrightarrow} \forall x \in M: \quad cx \leq cs$

$\Longleftrightarrow \forall x \in cM: \quad x \leq cs$

$\Longleftrightarrow cs$ ist o. Schr. von $c \cdot M$

4

$\leq$: s_1 ist o. Schr. von M

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ cs_1 o. Schr. von $c \cdot M$

$\overset{\sup}{\Longrightarrow}$ $(s_2 =)\ \sup cM \leq c \cdot s_1$

$\geq$: $s_2 = c(c^{-1}s_2)$ ist o. Schr von cM

$\overset{*}{\Longrightarrow}$ $c^{-1}s_2$ ist o. Schr. von M

$\overset{\sup}{\Longrightarrow}$ $(s_1 =)\ \sup M \leq c^{-1}s_2$

$\overset{c>0}{\Longrightarrow}$ $c \cdot s_1 \leq c \cdot c^{-1}s_2 = s_2$

Also gilt $\underline{\sup cM = s_2 = c \cdot s_1 = c \cdot \sup M}$ $\square$

ε- Ansatz (für 2)):

Wir zeigen dass

2.1) $c \cdot s_1$ o. Schr von $c \cdot M$

2.2) für alle $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$ ex. $x \in cM$ s.d.

$$c \cdot s_1 - \varepsilon < x$$

woraus sich ergeben wird, dass

$$(c \cdot \sup M =)\ c \cdot s_1 = \sup c \cdot M.$$

Zu 2.1: siehe Argument für 1).

Zu 2.2:

Sei $\varepsilon \in K^+$ beliebig. $c > 0 \Rightarrow c^{-1} > 0$; $c^{-1}, \varepsilon > 0 \Rightarrow c^{-1}\varepsilon > 0$

Dann ist $\varepsilon' := c^{-1}\varepsilon \in K^+$

Da $s_1 = \sup M$, existiert ein $x' \in M$ s.d.

$$s_1 - \varepsilon' < x'$$

$$\overset{c>0}{\Longrightarrow} \quad cs_1 - \varepsilon = c \cdot s_1 - c \cdot \varepsilon'$$

$$= c \cdot (s_1 - \varepsilon')$$

$$< c \cdot x' =: x,\ \in c \cdot M$$

$\Longrightarrow \exists x \in c \cdot M$: $cs_1 - \varepsilon < x$.

aus **2.1** + **2.2** folgt wie oben erklärt

$$c \cdot \sup M = \sup c \cdot M \qquad \square$$

Behauptung 5 Sei K ein ornungsvollst. angeordneter Körper. Weiters seien $A, B \subseteq K^+$ nicht leere, nach oben beschränkte Teilmengen. Dann gilt

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Beweis. Da A, B nicht leer und nach oben beschr. sind und K ordnungsvollst. ist, ex. $\underbrace{\sup A}_{\alpha :=}$ und $\underbrace{\sup B}_{\beta :=}$ in K.

Da A, B nicht leer und $\subseteq K^+$ sind, müssen

$$\alpha, \beta > 0$$ sein.

Für $x \in A \cdot B$ gilt $x = a \cdot b$ für ein $a \in A$ und $b \in B$. Da $A, B \subseteq K^+$ gilt

$$x = a \cdot b \underbrace{\leq}_{\substack{\text{da } a \leq \sup A = \alpha \\ \text{und } b \geq 0}} \alpha \cdot b \underbrace{\leq}_{\substack{\text{da } b \leq \sup B = \beta \\ \text{und } \alpha \geq 0}} \alpha \cdot \beta$$

D.h. $A \cdot B$ ist nach oben beschr., und zwar durch $\alpha \cdot \beta$ *

(bitte wenden!)

6

Da $A, B \neq \emptyset$, ist $A \cdot B$ auch nicht leer. Da $A \cdot B \neq \emptyset$ nach oben beschr. ist und K ordnungsvollst. ist, ex.

$$\sup A \cdot B \text{ in } K.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B.$$

Wegen * wissen wir bereits, dass $\alpha \cdot \beta$ eine o. Schr. von $A B$ ist, und damit, dass **(Δ)**

$$\sup A \cdot B \leq \alpha \cdot \beta = \sup A \cdot \sup B$$

Um die $\geq$-Richtung zu zeigen beobachten per Definition des $\sup A \cdot B$:

$$\begin{aligned}
& \forall a \in A, b \in B: \ \sup A \cdot B \geq a \cdot b \\
\overset{A \subseteq K^+}{\Longrightarrow} \ & \forall a \in A: \forall b \in B: \ a^{-1} \sup A \cdot B \geq a^{-1} \cdot ab = b \\
\overset{\text{Def. } \sup B}{\Longrightarrow} \ & \forall a \in A: \ a^{-1} \sup A \cdot B \geq \sup B \\
\overset{A \subseteq K^+,\ \sup B > 0}{\Longrightarrow} \ & \forall a \in A: \ (\sup A \cdot B)(\sup B)^{-1} \geq a \\
\overset{\text{Def. } \sup A}{\Longrightarrow} \ & (\sup A \cdot B)(\sup B)^{-1} \geq \sup A \quad (\dagger) \\
\overset{\sup B > 0}{\Longrightarrow} \ & \sup A \cdot B \geq \sup A \cdot \sup B
\end{aligned}$$

Aus **(Δ)** und **(†)** folgt

$$\sup A \cdot \sup B = \sup A \cdot B \qquad \square$$