

# Alna I, Woche 11 Übung

6. Januar 2022

A517

## Agenda

- Orga
  - Abgabe ÜB 10
  - Probeklausur
  - Modus Woche 12
  - Taht  $\{n-1; n+1\} \rightarrow \{n; n+1\}$
- ÜB 9
- Fragen zu ÜB 10
- Fragen zu ÜB 7+8 + Anmerkungen von Korrektor  
(lim,  $\rightarrow$ )

# ÜB9 A1 Ser. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

a) Behauptung. (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), wobei

(i)  $\sum_{n \geq 1} x_{n+1} - x_n$  konv.

(ii)  $(x_n)_n$  konv.

**Beweis.**

Partielle Summen:  $S(n) := \sum_{k=1}^n x_{k+1} - x_k$   
 wegen Teleskopsumme  $\rightarrow = x_{n+1} - x_1$

(i)  $\stackrel{\text{Def}^n}{\Leftrightarrow} (S(n))_n$  konv.

$\Leftrightarrow (x_{n+1} - x_1)_n$  konv.

Konv. invariant bzgl. Werteveresch.

$\Leftrightarrow (x_{n+1})_n$  "konstant" bzgl.  $n$  konv.

$\Leftrightarrow (x_n)_n$  konv.  $\Leftrightarrow$  (ii)



Konv. invariant bzgl. Indexversch.

b) Behauptung. Angenommen,  $(x_n)_n \subseteq [0, \infty)$ .

Dann  $\sum_{n \geq 1} x_n$  konv.  $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} x_n^2$  konv.

**Beweis.**

$J := \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n| \geq 1\}$

$\sum_{n \geq 1} x_n$  konv.  $\Rightarrow (x_n)_n \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  ex.  $N_1 \in \mathbb{N}$  s.d.  
 $\forall n \geq N_1: |x_n| < \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow [N_1, \infty)_\mathbb{N} \subseteq J^c$

Darum für  $n \geq N_1$  gilt.

$S_2(n) := \sum_{k \geq 1} x_k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1-1} x_k^2}_{\alpha_2'} + \sum_{k=N_1}^n x_k^2 \leq x_k$

$\leq \alpha_2' - \alpha_1 + S_1(n)$

Darum  $S_2(n) \leq \alpha_2' - \alpha_1 + S$   $\rightarrow \sum_{k \geq 1} x_k^2 =: S$

für alle  $n \geq N_1$

$\Rightarrow (\sum_{k=1}^n x_k^2)_n$  monoton + beschränkt  $\Rightarrow$  Reihe konv.  $\square$   
 wachsend nach oben

# ÜB9 A2

$$a) \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-n(n-1)} = \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \xrightarrow{n} e^{-2}$$

$\rightarrow e^{-2} \neq 0$

$$\Rightarrow \limsup_n |a_n|^{1/n} = e^{-2} \in (0, 1)$$

$\xRightarrow{\sqrt{\text{-Krit}}}$  Reihe konv. absolut.

$$b) \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = (-1)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{n+1}\right)^n}_{=: e_n \text{ (mon. } \uparrow)} \in (0, \infty)$$

$(a_n)$  monoton fallend

$$\begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} (n+1)^{n+1}} \\ = \left(\frac{(n+1)(n+1-1)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \in [0, 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Nullfolge  $e_n \rightarrow e; \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow e \cdot 0 = 0$

Darum kann man das Leibniz-Krit. anwenden

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n \text{ konvergent}$$

$$\left| (-1)^n a_n \right| = a_n = \frac{e_n}{n+1} \xrightarrow{n} e \neq 0$$

Da  $e_n \xrightarrow{n} e$  existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  s.d.

$$\forall n \geq n_0: e_n > e/2. \quad (*)$$

also  $a_n > \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$  für  $n \geq n_0$ .

Harmonische Reihe  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{e}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} = \infty$$

Minorantenkrit. Aus  $(*) + (**)$  folgt

$$\sum_{n \geq 1} |(-1)^n a_n| = \sum_{n \geq 1} a_n = \infty$$

also ist die Reihe nicht absolut konvergent.

c) Wir behaupten, dass die Reihe nicht konvergent ist.

Es gilt:  $\sum_{n \geq 1} a_n$  konv  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

$\exists \varepsilon: \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ .

Es gilt  $a_n = \frac{n^n \cdot n^{1/2}}{n^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n+1}} = \frac{n^{1/2}}{e_{n^2}^{1/n}}$  für  $n \in \mathbb{N}$

wobei  $e_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$  für alle  $N \in \mathbb{N}$ .

Wir wissen:  $(e_N)_{N \geq 1}$  mon.  $\uparrow$  e

Darum  $a_n \geq \frac{n^{1/2}}{e^{1/n}} \geq \frac{1^{1/2}}{(e^n)^{1/n}} = \frac{1}{e}$

also  $\liminf_n a_n \geq \frac{1}{e} > 0$ .

Konklusion: Reihe nicht konv (siehe oben)

# ÜB9 A3

$$S := \sum_{j \in J} x_j \stackrel{\text{Def.}}{=} \sup \{ s_E \mid E \subseteq J, E \text{ endlich} \}$$

wobei  $s_E := \sum_{j \in E} x_j$  für  $E \subseteq J$  endlich.

Ann:  $S < \infty$

Beob1 für  $E \subseteq J$  endl. gilt

$$S \stackrel{\text{sup}}{\geq} s_E = \sum_{j \in E} x_j \geq |E| \cdot \min_{j \in E} x_j$$

Beob2 für  $E \subseteq J_n := \{j \in J \mid x_j > \frac{1}{n}\}$  endlich gilt

$$S \stackrel{\text{Beob 1.}}{\geq} |E| \cdot \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow |E| \leq n \cdot |S| \quad (*)$$

$$\Rightarrow |J_n| \leq n |S| \text{ sonst existiert}$$

endl.  $E \subseteq J_n$  mit  $|E| > n |S|$ ,

was  $(*)$  widerspricht.

Darum wissen wir:

$$J_n \text{ endl. } (\Rightarrow \text{ abzählbar})$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Daraus folgt dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \text{ abzählbar}$$

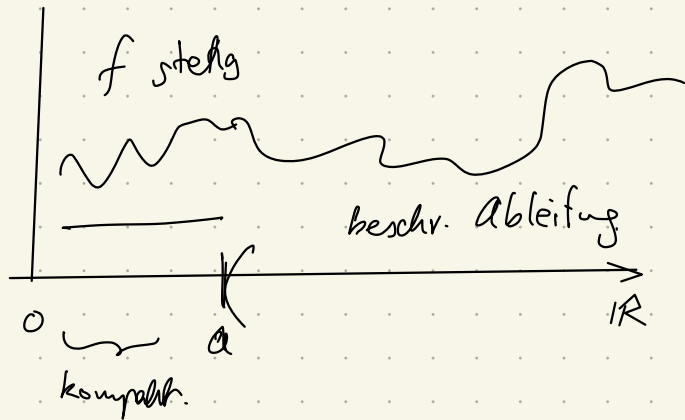
Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{j \in J \mid x_j > \frac{1}{n}\} \\ &= \{j \in J \mid \exists n \in \mathbb{N}: x_j > \frac{1}{n}\} \end{aligned}$$

Archimed. Prinzip  $= \{j \in J \mid x_j > 0\}$   
 $= J$

Darum ist  $J$  abzählbar.  $\square$

3



# ÜB9 A4

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); x \mapsto x^{1/n}$   
 $n \geq 1.$

$f$  stetig. ✓

auf  $[0, 1]$  (was kompakt ist),  
 sind alle stetige Fkt gl. stetig.

Darum ist  $f|_{[0, 1]}$  gl. stetig.

auf  $[1, \infty)$ :

Seien  $x_1, x_2 \in [1, \infty)$  mit  $x_1 < x_2$

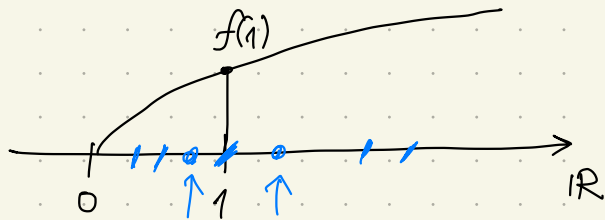
Dann

$$\begin{aligned}
 & |f(x_2) - f(x_1)| \\
 & \stackrel{\text{MWS}}{=} |(x_2 - x_1) \cdot f'(x^*)| \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{für ein } x^* \in (x_1, x_2) \\
 & = \frac{1}{n} |x_2 - x_1| \underbrace{x^{*\frac{1}{n}-1}}_{\leq 0} \\
 & \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \text{mon.} \rightarrow \text{bzgl. } x^* \\
 & \leq \frac{1}{n} |x_2 - x_1| \cdot 1^{\frac{1}{n}-1} \\
 & = \frac{1}{n} |x_2 - x_1|.
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  gilt für  $\delta := n \cdot \varepsilon$   
 $\forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$  mit  $|x_2 - x_1| < \delta$

$$\begin{aligned}
 |f(x_2) - f(x_1)| & \leq \frac{1}{n} |x_2 - x_1| \\
 & < \frac{1}{n} \delta = \varepsilon
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f|_{[1, \infty)}$  gl. stetig



Sei  $\varepsilon > 0$ .

Da  $f|_{[0,1]}$  und  $f|_{[1,\infty)}$  g.l. stetig sind, existieren

$\delta_1, \delta_2 > 0$  s.d.

$$(1) \forall x_1, x_2 \in [0,1] : |x_2 - x_1| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/2$$

$$(2) \forall x_1, x_2 \in [1,\infty) : |x_2 - x_1| < \delta_2 \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/2$$

Setze  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ .

Seien  $x_1, x_2 \in [0,\infty)$  mit  $x_1 < x_2$  und  $|x_1 - x_2| < \delta$

Fall 1  $x_1, x_2 \in [0,1]$ :

Dann wegen (1) gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Fall 2  $x_1, x_2 \in [1,\infty)$ :

Dann wegen (2) gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Fall 3  $x_1 \in [0,1], x_2 \in [1,\infty)$

Dann, da  $1 \in [0,1] \cap [1,\infty)$  und

$$|x_1 - 1| \leq |x_1 - x_2| < \delta$$

$$|x_2 - 1| \leq |x_2 - x_1| < \delta$$

gelten wegen (1) + (2):

$$|f(x_1) - f(1)| < \varepsilon/2$$

$$|f(x_2) - f(1)| < \varepsilon/2$$

$\Delta$ -Ungl.

$$\Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \leq \dots + \dots < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Darum  $f$  g.l. stetig.