Ana I, Woche 4 Übung

4. Nov 2021

Agenda

- **Orga**
  - ÜB0 + 1
  - Takt
  - Anmerkung im Moodle
- **Besprechung ÜB$_2$**
  - A1 vorrechnen?
  - A2 vorrechnen?
  - A3 vorrechnen?
  - A4 vorrechnen?
- **Besprechung ÜB$_3$**
  - Stil aus VL für A1
  - A2: Anordnungen, $\mathrm{char}(K)$,
    Satz: $\mathrm{char}(K) \neq 0 \Rightarrow K$ hat keine Anordnung
  - A3: Beziehung zw. (a) und (b)?

ÜB2 A1

Gegeben: (N, e, ν) erfülle P1+P2.

Seien $(A_n)_{n\in N}$ die (eindeutig) durch

$A_e := \{e\}$; $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$ für $n \in N$

rekursiv definierten Teilmengen von N.

Beh. Sei $B(\cdot)$ eine Aussage, s.d.

(α): $B(e)$

(β): $\forall n \in N: (\forall k \in A_n : B(k) \Rightarrow B(\nu(n)))$

Dann gilt $B(n)$ für alle $n \in N$

(1

Beweis

~~Setze $M := \{n \in N \mid B(n) \text{ gilt}\}$~~

Setze $M := \{n \in N \mid \forall k \in A_n : B(k) \text{ gilt}\}$

Z: $M = N$ (warum?)

Da (N, e, ν) Axiom P2 genügt, reicht es aus **Z**:

i) $e \in M$

ii) für alle $n \in M$ gilt $\nu(n) \in M$

d.h. M ist **induktiv**

Zu i):

Sei $k \in A_e$ beliebig

$\Longrightarrow k = e$, da $A_e = \{e\}$. ***)**

Aus ***)** + **(α)** folgt $B(k)$.

$\Longrightarrow \forall k \in A_e : B(k)$ gilt

$\xrightarrow[\text{Konstr. von } M]{} e \in M$

Darum gilt **i)**.

(2)

Zu ii):

Sei $n \in M$ beliebig.

Δ) $\xRightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\forall k \in A_n$: $B(k)$ gilt.

†) Aus Δ) + (β) folgt $B(\nu(n))$.

Sei $k \in A_{\nu(n)}$ beliebig.

Fall 1 $k \in A_n$: Wegen Δ) gilt $B(k)$

Fall 2 $k = \nu(n)$: Wegen †) gilt $B(k)$.

$\Longrightarrow$ $\forall k \in A_{\nu(n)}$: $B(k)$ gilt.

$\xRightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\nu(n) \in M$

Warum nur diese Fälle?

$\Longrightarrow$ $\forall n \in M$: $\nu(n) \in M$

Darum gilt **ii)**.

Da (N, e, ν) P2 genügt, folgt aus **i)** + **ii)** dass $M = N$

Sei nun $n \in N$ beliebig.

$\Longrightarrow$ $n \in M$, da $M = N$.

$\xRightarrow{\text{Konstr. von } M}$ $\forall k \in A_n$: $B(k)$ gilt

$\Longrightarrow$ $B(n)$ gilt, da $n \in A_n$.

$\Longrightarrow$ $\forall n \in N$: $B(n)$ gilt.

$\square$ (Beh.)

ÜB2 A2

Beh. 1. L ist induktiv, wobei

$L := \{n \in N \mid$ das einzige $x \in A_n$ mit $\nu(x) \notin A_n$ ist $x = n\}$

Bew. Z: **1)** $e \in L$; **2)** $\forall n \in L: \nu(n) \in L$

Im Folgenden setzen wir für $n \in N$

$$S_n := \{x \in A_n \mid \nu(x) \notin A_n\}.$$

Per Konstr. gilt $L = \{n \in N \mid S_n = \{n\}\}$.

Zu 1: Da $A_e = \{e\}$, gilt $S_e \subseteq A_e = \{e\}$.
Da (N, e, ν) Axiom P1 erfüllt, gilt $\nu(e) \neq e$.

$\Longrightarrow$ $(e \in A_e$ and $)$ $\nu(e) \notin A_e$

$\Longrightarrow$ $e \in S_e$

$\Longrightarrow$ $\{e\} \subseteq S_e \subseteq \{e\}$

$\Longrightarrow$ $S_e = \{e\}$

$\Longrightarrow$ $e \in L$.

Darum gilt 1.

Zu 2: Sei $n \in L$ beliebig.
Dann $S_n = \{n\}$. Wir müssen zeigen, dass $S_{\nu(n)} = \{\nu(n)\}$ gilt.

$\subseteq$:

Sei $x \in S_{\nu(n)}$ beliebig.

Dann $x \in A_{\nu(n)} \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} A_n \cup \{\nu(n)\}$
und $\nu(x) \notin A_{\nu(n)}$.

Fall 1 $\quad x = \nu(n)$ (gut!)

Fall 2 $\quad x \in A_n$.
Da $A_{\nu(n)} \supseteq A_n$ und $\nu(x) \notin A_{\nu(n)}$, gilt $\nu(x) \notin A_n$.
Darum $x \in S_n \overset{\text{Annahme}}{=} \{n\}$.
Also $x = n$.
Aber dann $\nu(x) = \nu(n) \in A_{\nu(n)}$.
Widerspruch!

Darum ist nur Fall 1 möglich.
D.h. $x = \nu(n)$.

$\Longrightarrow$ $\forall x \in S_{\nu(n)}: x = \nu(n)$ $\quad$ d.h. $S_{\nu(n)} \subseteq \{\nu(n)\}$

(ÜB2, A2, Beh 1, 2))

$\supseteq$: Wir müssen zeigen, dass
$m := v(n) \in S_{v(n)}$.

Da $m = v(n) \in A_{v(n)}$, reicht es aus zu zeigen, dass
$v(m) \notin A_{v(n)} \left(\overset{\text{Def}^{\underline{n}}}{=} A_n \cup \{v(n)\}\right)$

a. Da $v(k) \neq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe **[VL, Seite 16]**),
gilt $v(m) = v(v(n)) \neq v(n)$.
Also $v(m) \notin \{v(n)\}$.

Nebenargument Seien $k, l \in \mathbb{N}$.
Wenn $v(k) \in A_l$, dann laut **[VL, Seite 19]**
gilt $(k \in A_k \subseteq A_k \cup \{v(k)\} =) A_{v(k)} \subseteq A_l$.
Also $k \in A_l$. D.h. $\forall k, l \in \mathbb{N}: v(k) \in A_l \Rightarrow k \in A_l$.

b. Also, aus $v(m) \in A_n$ würde
$(v(n) =)\, m \in A_n$ folgen.
Da $n \in L$, ist dies unmöglich.

4

a + b
$\Longrightarrow v(m) \notin A_n \cup \{v(n)\} \overset{\text{Konstr.}}{=} A_{v(n)}$
$\Longrightarrow v(n) \in A_{v(n)}$
und $(v(v(n)) =)\, v(m) \notin A_{v(n)}$
$\overset{\text{Konstr. von } S}{\Longrightarrow} v(n) \in S_{v(n)}$
$\Longrightarrow \{v(n)\} \subseteq S_{v(n)}$

Aus den $\subseteq$ + $\supseteq$ Teilargumenten folgt $S_{v(n)} = \{v(n)\}$.
Darum $v(n) \in L$.

Darum gilt **2**.

Aus **1** + **2** folgt die Behauptung.

$\square$ (Beh.)

Beh 2. (N, e, ν) erfülle P1 + P2.

Sei $\leqslant$ auf N wie folgt definiert:

$$x \leqslant y :\iff A_x \subseteq A_y.$$

Dann ist $(N, \leqslant)$ eine OR.

Beweis

Refl Sei $x \in N$ bel. Dann $A_x = A_x$ und damit $A_x \subseteq A_x$, woraus sich $x \leqslant x$ ergibt.

Trans Seien $x, y, z \in N$. Dann

$$x \leqslant y \text{ und } y \leqslant z$$
$$\overset{\text{Konstr.}}{\Longrightarrow} A_x \subseteq A_y \text{ und } A_y \subseteq A_z$$
$$\Longrightarrow A_x \subseteq A_z$$
$$\overset{\text{Konstr.}}{\Longrightarrow} x \leqslant z.$$

Antisymmetrie

Seien $x, y \in N$.
Angenommen, $x \leqslant y$ und $y \leqslant x$.
Dann $A_x \subseteq A_y$ und $A_y \subseteq A_x$.

Also $A_x = A_x =: B$.

Laut **Beh 1** wissen wir, dass $L \subseteq N$ induktiv ist. Da (N, e, ν) P2 genügt, folgt $L = N$.

$\Longrightarrow x, y \in L$

$\Longrightarrow$ x ist das einzige El. in A_x mit $\nu(x) \notin A_x$
und y " " " " " A_y " $\nu(y) \notin A_y$

$\Longrightarrow$ x ist das einzige El. in B mit $\nu(x) \notin B$
und y " " " " " B " $\nu(y) \notin B$

$\Longrightarrow$ $x = y$, weil beide eindeutig die o.s. Eigenschaft besitzen.

$\square$ (Beh.)

ÜB2 A3

Beh 3. (N, e, ν) erfülle P1 + P2. Dann

$$\forall k,n\in N: \overbrace{(\exists \text{ Bijektion}, f: A_k \to A_n)}^{P(k,n)} \Leftrightarrow k=n$$

Beweis Setze

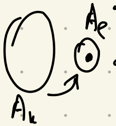
$$L := \{n\in N \mid \forall k\in N: P(k,n) \Leftrightarrow k=n\}$$

Da (N,e,ν) P2 erfüllt, reicht es aus zu zeigen, dass L induktiv ist, woraus sich die Behauptung offensichtlich ergibt.

$e\in L$: Sei $k\in N$ beliebig. Z: $P(k,e)\Leftrightarrow k=e$

$\Leftarrow$: Wenn $k=e$, dann, da id_{A_k} eine Bijektion zw. A_k und $A_k=A_e$ ist, gilt $P(k,e)$.

$\Rightarrow$: Angenommen, $P(k,e)$ gelte. D.h. eine Bijektion, $f: A_k\to A_e$ existiert.



Da $e, k\in A_k$ und $A_e=\{e\}$, gilt $f(k)=e=f(e)$, und damit gilt $k=e$, da f injektiv ist.

Darum $e\in L$.

$n\to\nu(n)$ Sei $n\in L$ beliebig.

Wir müssen zeigen, dass $\nu(n)\in L$.

Sei $k\in N$ beliebig. Z: $P(k,\nu(n))\Leftrightarrow k=\nu(n)$

$\Leftarrow$: Angenommen, $k=\nu(n)$, dann, da id_{A_k} eine Bij. zw. A_k und $A_k=A_{\nu(n)}$ gilt $P(k,\nu(n))$.

$\Rightarrow$: Angenommen, $P(k,\nu(n))$ gelte. Dann existiert eine Bijektion $f: A_k\to A_{\nu(n)}$ $(\blacktriangle)$

[Ansatz: zeige, dass $k=\nu(k')$ für ein $k'\in N$. Dann konstruiere Bij. zw. $A_{k'}$ und A_n. Aus IV folgt $k'=n$ und damit $k=\nu(n)$.]

Beh 3a. $k\neq e$.

Bew. Da $Bild(\nu)=N\setminus\{e\}$, gilt $\nu(n)\neq e$. Da $e\in L$ folgt hieraus dass keine Bijektion zw. $A_{\nu(n)}$ und A_e existiert. Da A_k und $A_{\nu(n)}$ bijektiv äquivalent sind $(\blacktriangle)$, gibt es ebenfalls keine Bij. zw. A_k und A_e. Wieder, da $e\in L$, folgt hieraus, dass $k\neq e$. $\square$ (Beh 3a)

Da also $k\neq e$ und $\nu: N\to N\setminus\{e\}$ surjektiv ist, existiert $k'\in N$ mit $\nu(k')=k$.

Beh. 3b $\exists f' : A_{v(k')} \longrightarrow A_{v(n)}$ bijektiv mit $f'(v(k')) = v(n)$.

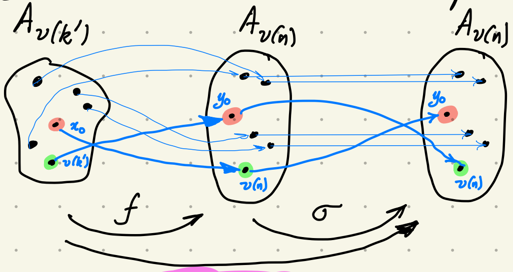
Bew. Setze $y_0 := f(v(k'))$.

Falls $y_0 = v(n)$, so erfüllt $f' := f$ die Behauptung.

Falls $y_0 \neq v(n)$, sei

$$\sigma : A_{v(n)} \longrightarrow A_{v(n)}$$

die (bijektive!) Permutation auf $A_{v(n)}$, die y_0 und $v(n)$ tauscht und sonst alles fixiert. Betracht die Komposition:



$$f' := \sigma \circ f : A_{v(k')} \longrightarrow A_{v(n)}$$

Als Komposition zweier Bijektionen ist f' bijektiv und per Konstruktion gilt:

$$f'(v(k')) = \sigma(y_0) = v(n).$$

$\square$ (Beh 3b)

Wegen **Beh 3b** können wir o.E. f durch f' ersetzen und annehmen, dass $f(v(k')) = v(n)$ erfüllt ist. ✱

Setze nun $g := f|_{A_{k'}}$

Dann ist g eine injektive Abbildung (weil f injektiv ist) mit $\mathrm{Dom}(g) = A_{k'}$ und

$$\mathrm{Bild}(g) = f(A_{k'})$$

$$\overset{⊛}{=} f(A_{v(k')} \setminus \{v(k')\})$$

da f inj

$$= f(A_{v(k')}) \setminus f(\{v(k')\})$$

da f surj

$$= A_{v(n)} \setminus \{v(n)\}$$

wegen ✱

$$\overset{⊛}{=} A_n$$

Nebenargument ⊛: Für $l \in \mathbb{N}$ gilt laut **A2** $v(l) \notin A_l$, sodass $A_{v(l)} = A_l \cup \{v(l)\}$ eine disj. Vereinigung ist. Wegen Disjunktheit gilt also $A_l = A_{v(l)} \setminus \{v(l)\}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Darum ist g eine Bijektion zw. $A_{k'}$ und A_n. Also gilt $P(k', n)$. Da $n \in L$ gilt $k' = n$ und damit $k = v(k') = v(n)$. $\square$ ($\Longleftarrow$)

Also wurde $\forall k \in \mathbb{N}: P(k, v(n)) \Longleftrightarrow k = v(n)$ gezeigt.

Also $v(n) \in L$.

Also wurde $\forall n \in L : v(n) \in L$ gezeigt.

Also haben wir bewiesen, dass L induktiv ist.
Wie oben erklärt folgt daraus die Behauptung. $\square$ (Beh 3)

Alternativer Beweis von **Beh. 3a**:

Bew. Angenommen, $k = e$.
Dann, da $f^{-1} : A_{v(n)} \longrightarrow A_k = A_e$ eine Bijektion ist, gilt

$$P(e, v(n))$$

Da $e \in L$, folgt $v(n) = e$ daraus.
Aber dies widerspricht $\mathrm{Bild}(v) = \mathbb{N} \setminus \{e\}$.
Darum stimmt die Annahme oben nicht.
D.h. $k \neq e$ muss gelten. $\square$ (Beh 3a)

ÜB2 A4

(Skizze)

IA: $f(0) = 0 = 2^0 - 1$

$f(1) = 3 = 2^1 + 1$.

IV. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen

$\forall k \in \mathbb{N}_0 : k \leq n \Rightarrow f(k) = \begin{cases} 2^k - 1 : & k \text{ ger.} \\ 2^k + 1 : & k \text{ unger.} \end{cases}$

Fall 1 $n+1$ gerade

Dann $f(n+1) \overset{\text{Konstr.}}{=} \overset{\text{unger.}}{f(n)} + 2 \overset{\text{ger.}}{f(n-1)}$

$\overset{\text{IV}}{=} (2^n + 1) + 2(2^{n-1} - 1)$

$= 2 \cdot 2^n + 1 - 2$

$= 2^{n+1} - 1$

Fall 2 $n+1$ ungerade

Dann $f(n+1) \overset{\text{Konstr.}}{=} \overset{\text{ger.}}{f(n)} + 2 \overset{\text{unger.}}{f(n-1)}$

$\overset{\text{IV}}{=} (2^n - 1) + 2(2^{n-1} + 1)$

$= 2 \cdot 2^n - 1 + 2$

$= 2^{n+1} + 1$

Also gilt die Aussage für $n+1$.

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $\square$