Ana I, Woche 8 Übung

~~2. Dez 2021~~

Ersatztermin: 7.12.

ÜB5 + 7

ÜB5 A1

0

a) Sei $x_n := \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}$.

Behauptung. $x_n \longrightarrow 2 =: L$

Beweis. Z: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n : |x_n - L| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall k \geq n : |x_k - L| < \varepsilon$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig.

$\exists n \in \mathbb{N} \; \forall k \geq n : |x_k - L| < \varepsilon$

Wähle ein $n \in \mathbb{N}$, das

(1) $\frac{1}{n} < \varepsilon$

erfüllt, z.B. $n = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$.

$\forall k \geq n : |x_k - L| < \varepsilon$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n$:

$$|x_k - L| = \left| \frac{2k+1}{k} - 2 \right| = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \overset{(1)}{<} \varepsilon.$$

Darum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 2$. $\square$

ÜB5 A1

b) Zunächst beweisen wir

Behauptung 1. Sei $n_0 := 4$
Dann für alle $n \geq n_0$ gilt $n \leq 2^{\frac{n}{2}}$

Beweis.

IA: $n = 4 \Rightarrow n = 2^2 = 2^{\frac{n}{2}}$.

IS: sei $n \geq 4$. Angenommen $n \leq 2^{\frac{n}{2}}$.

Dann

$$2^{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \overset{IV}{\geq} \sqrt{2} \cdot n$$
$$= n + (\sqrt{2}-1)n.$$

Es gilt $(\sqrt{2}-1)n \geq (\sqrt{2}-1) \cdot 4$
$$= \frac{1+3}{1+\sqrt{2}} > 1.$$

Darum

$$2^{\frac{n+1}{2}} \geq n + (\sqrt{2}-1)n > n+1.$$

Also gilt die Behauptung per vollst. Ind. $\square$

Sei nun $x_n := \frac{n}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung 2. $x_n \to 0$

Beweis. Z: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geq n : |x_k| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit

(1) $n \geq n_0$

(2) $n > 2 \cdot \log_2(1/\varepsilon)$

z.B. $n = \max\{n_0, \lceil 2\log_2(1/\varepsilon)\rceil + 1\}$.

Dann $\forall k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n$ gilt:

$$|x_k| = \frac{k}{2^k} \leq \frac{2^{\frac{k}{2}}}{2^k} \quad \text{wegen (1) + **Beh. 1**}$$
$$= 2^{-k/2}$$
$$\leq 2^{-n/2} \overset{(2)}{<} \varepsilon.$$

Also gilt $(x_n)_n \to 0$. $\square$

1

c)

Sei $x_n := \sum_{k=1}^{n} k^3/n^4$

Behauptung. $x_n \longrightarrow \frac{1}{4} =: L$

Beweis. Z: $\forall \varepsilon>0 : \exists n\in\mathbb{N} : \forall k\geq n : |x_k - L| < \varepsilon$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle ein $n\in\mathbb{N}$, das

(1) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{n} < \varepsilon$

erfüllt, z.B. $n = \left\lceil \frac{2\cdot 3}{4\varepsilon} \right\rceil$

Dann gilt für alle $k\in\mathbb{N}$ mit $k \geq n$:

$$|x_k - L| = \left| \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4} - \frac{1}{4} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{n} \quad \text{da } 0<\tfrac{1}{n}\leq 1$$

$$\overset{(1)}{<} \varepsilon.$$

Darum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 1/4$ $\square$

ÜB5 A3

2

a) $x_n := \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$, $y_n := n^2 \xrightarrow[n]{} +\infty$ $\Big\} \Rightarrow x_n y_n = n \xrightarrow[n]{} +\infty$

b) $x_n := -\frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$, $y_n := n^2 \xrightarrow[n]{} +\infty$ $\Big\} \Rightarrow x_n y_n = n \xrightarrow[n]{} -\infty$

c) $x_n := 2^{-n} \xrightarrow[n]{} 0$, $y_n := 2^n \xrightarrow[n]{} \infty$ $\Big\} \Rightarrow x_n y_n = 1 \xrightarrow[n]{} 1$

d) $x_n := (-1)^n e^{-n} \xrightarrow[n]{} 0$

$y_n := e^n \xrightarrow[n]{} +\infty$

aber $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, was zwar (im Betrag durch 1) beschränkt ist, aber sowohl 1 und −1 als Häufungspunkte hat, also nicht konvergent sein kann.

ÜB5 A4

Behauptung

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \overbrace{\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in(0,\infty):\ \underbrace{\prod_{i=1}^{n}x_i=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i\geq n}_{Q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}}^{P(n)}$$

Beweis. (per Ind.)

IA: für $n=1$: Sei $x_1\in(0,\infty)$ beliebig
Dann $\prod_{i=1}^{n}x_i=1\Rightarrow x_1=1$
$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_1=1\geq n$

Also gilt $Q(x_1)$ für alle $x_1\in(0,\infty)$.
Also gilt $P(1)$.

IS: Sei $n\geq 1$. Angenommen $P(n)$ gelte.
D.h. $Q_n(y_1,y_2,\dots,y_n)$ gilt für alle $y_1,y_2,\dots,y_n\in(0,\infty)$.

3

Seien nun $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}\in(0,\infty)$ beliebig.

Z: $Q_{n+1}(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ gilt.

Fall 1. Für alle i gilt $x_i<1$.

Dann $\prod_{i=1}^{n+1}x_i<1$ und die Implikation in $Q_{n+1}(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ ist dann automatisch wahr.

Fall 2. Für alle i gilt $x_i\geq 1$.

Dann $\sum_{i=1}^{n}x_i\geq n$ und die Implikation in $Q_{n+1}(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ ist dann automatisch wahr.

Fall 3. Sonst existieren $i,j\in\{1,2,\dots,n+1\}$ so dass $x_i\geq 1$ und $x_j<1$.
Insbesondere gilt $i\neq j$.
Nach Permutation and wegen Invarianz der Q_{n+1}-Aussage unter Permutationen, können wir o.E. annehmen, $i=n+1$, $j=n$.

Also gilt

$$x_n < 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} \geq 1.$$

Setze nun

$$y_i := x_i \quad \text{für } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

$$y_n := x_n \cdot x_{n+1}$$

Beobachte

(1) $$\prod_{i=1}^{n} y_i = \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

(2) Sei $r := x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1}$

Dann $$r = 1 - (x_n \cdot x_{n+1} - x_n - x_{n+1} + 1)$$

$$= 1 - \underbrace{(x_n - 1)}_{<0}\underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{\geq 0}$$

$$\geq 1$$

Darum

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \prod_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$\overset{\text{Ind}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} y_i \geq n$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i + \overbrace{x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1}}^{=r}$$

$$\geq n + r \overset{(2)}{\geq} n + 1$$

Also gilt $Q_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$.

Also gilt $P(n+1)$.

Darum gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion. $\square$

4

ÜB6 A3

(unter Arbeit)

5

6