
Lineare Algebra I

⊛ ————— ⊛
Lösungen zu diversen Aufgaben im Kurs

Raj Dahya
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig.
Wintersemester 2020/2021

Vorwort

Dieses Dokument enthält Lösungsansätze zu den Übungsserien, Selbstkontrollenaufgaben, und Quizzes. (Diese werden natürlich *nach* Abgabefristen hochgeladen.) Der Zweck dieser Lösungen besteht darin, Ansätze zu präsentieren, mit denen man seine eigenen Versuche vergleichen kann.

Inhaltsverzeichnis

I	Übungsserien	6
1	Woche 1	7
1.1	Aufgabe 1	7
1.2	Aufgabe 2	9
1.3	Aufgabe 3	12
2	Woche 2	14
2.1	Aufgabe 1	14
2.2	Aufgabe 2	15
2.3	Aufgabe 3	16
3	Woche 3	18
3.1	Aufgabe 1	18
3.2	Aufgabe 2	20
3.3	Aufgabe 3	22
4	Woche 4	23
4.1	Aufgabe 1	23
4.2	Aufgabe 2	25
4.3	Aufgabe 3	26
5	Woche 5	27
5.1	Aufgabe 1	27
5.2	Aufgabe 2	27
5.3	Aufgabe 3	28
6	Woche 6	29
6.1	Aufgabe 1	29
6.2	Aufgabe 2	33
6.3	Aufgabe 3	35
7	Woche 7	37
7.1	Aufgabe 1	37
7.2	Aufgabe 2	38
7.3	Aufgabe 3	40
8	Woche 8	42
8.1	Aufgabe 1	42
8.2	Aufgabe 2	45
8.3	Aufgabe 3	46
9	Woche 9	48
9.1	Aufgabe 1	48
9.2	Aufgabe 2	50
9.3	Aufgabe 3	51

10 Woche 10	52
10.1 Aufgabe 1	52
10.2 Aufgabe 2	54
10.3 Aufgabe 3	56
11 Woche 11	58
11.1 Aufgabe 1	58
11.2 Aufgabe 2	60
11.3 Aufgabe 3	61
11.4 Bonusaufgabe 4	62
11.5 Bonusaufgabe 5	63
 II Selbstkontrollenaufgaben	 64
4 Woche 4	65
4.1 Aufgabe 1	65
4.2 Aufgabe 2	65
4.3 Aufgabe 3	65
4.4 Aufgabe 4	66
4.5 Aufgabe 5	67
4.6 Aufgabe 6	67
4.7 Aufgabe 7	67
4.8 Aufgabe 8	68
4.9 Aufgabe 9	69
4.10 Aufgabe 10	69
4.11 Aufgabe 11	70
5 Woche 5	72
5.2 Aufgabe 2	72
5.3 Aufgabe 3	73
5.4 Aufgabe 4	73
5.5 Aufgabe 5	74
5.6 Aufgabe 6	74
5.7 Aufgabe 7	74
5.8 Aufgabe 8	75
5.10 Aufgabe 10	75
5.12 Aufgabe 12	75
5.13 Aufgabe 13	76
5.14 Aufgabe 14	76
5.15 Aufgabe 15	77
6 Woche 6	78
6.1 Aufgabe 1	78
6.2 Aufgabe 2	78
6.3 Aufgabe 3	78
6.4 Aufgabe 4	79
6.5 Aufgabe 5	79
6.6 Aufgabe 6	79
6.7 Aufgabe 7	79
6.8 Aufgabe 8	81
 III Quizzes	 82
1 Woche 1	83
2 Woche 2	84
3 Woche 3	85
4 Woche 4	86

5	Woche 5	87
6	Woche 6	88
7	Woche 7	89
8	Woche 8	90
9	Woche 9	91
10	Woche 10	92
11	Woche 11	94
	Literaturverzeichnis	95

TEIL I
Übungsserien

Übungsserie 1

Woche 1

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variante anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 1.1

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge

$$L_{\alpha,\beta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta\}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $m = 3$ und $n = 4$, und $A_\alpha \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b}_\beta \in \mathbb{R}^m$ durch

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 6 & -3 \\ 2 & 14 & \alpha & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_\beta := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Um die Lösungsmenge zu bestimmen führen wir das Gaußverfahren aus:

Ursprüngliches LGS $(A_\alpha | \mathbf{b}_\beta)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 14 & \alpha & -2 & \beta \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformationen

$$\begin{array}{l} Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - 2 \cdot Z_1 \end{array}$$

an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha - 4} & 0 & \beta - 8 \end{array} \right)$$

Die eingekreisten Einträge markieren die ersten Einträge der Stufen. Es gibt also 2 oder 3 Stufen, je nachdem, ob $\alpha - 4 = 0$. Dies führt zu einem Fallunterschied:

Fall 1. $\alpha - 4 = 0$. Das heißt, $\alpha = 4$. In diesem Falle hat das augmentierte System genau 2 Stufen und sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 8 \end{array} \right)$$

Dies führt zu zwei weiteren Fällen, denn die 3. Gleichung ist jetzt genau dann lösbar, wenn $\beta - 8 = 0$.

Fall 1a. $\beta - 8 \neq 0$. Das heißt, $\beta \neq 8$. Dann ist die 3. Gleichung und damit das LGS nicht lösbar. Darum erhalten wir $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \emptyset}$.

Fall 1b. $\beta - 8 = 0$. Das heißt, $\beta = 8$. Dann ist die 3. Gleichung trivialerweise erfüllt. Das augmentierte System sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und kann jetzt aufgelöst werden. Wir arbeiten von unten nach oben:

Aus der ganzen Zeilenstufenform erschließt sich

x_3, x_4 sind frei

Aus der Stufenform von Gleichungen 2 und 1 erschließt sich

$$\begin{aligned} x_2 &= -4 - 4x_3 + 2x_4 \\ x_1 &= 4 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 \\ &= 4 - 7(-4 - 4x_3 + 2x_4) - 2x_3 + x_4 \\ &= 32 + 26x_3 - 13x_4 \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Form der Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 + 26x_3 - 13x_4 \\ -4 - 4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 + 26x_3 - 13x_4 \\ -4 - 4x_3 + 2x_4 \\ 0 + 1x_3 + 0x_4 \\ 0 + 0x_3 + 1x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26x_3 \\ -4x_3 \\ 1x_3 \\ 0x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13x_4 \\ 2x_4 \\ 1x_4 \\ 1x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit x_3, x_4 frei wählbar.

Also erhalten wir in diesem Falle $L_{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$,

oder etwas kompakter formuliert, $L_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Fall 2. $\alpha - 4 \neq 0$. Das heißt, $\alpha \neq 4$. In diesem Falle hat das augmentierte System genau 3 Stufen und diesmal ist nur x_4 frei. Man beachte, dass dies im Grunde genau wie Fall 1b ist, nur dass wir zusätzlich Gleichung 3 beachten und x_3 bestimmen müssen.

Aus der Stufenform von Gleichungen 3 ergibt sich

$$x_3 = \frac{\beta - 8}{\alpha - 4}$$

Der Rest der Lösung des Gleichungssystems verhält sich genau wie im Fall 1b, das heißt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta - 8}{\alpha - 4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei x_4 frei wählbar ist.

Also erhalten wir in diesem Falle $L_{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta - 8}{\alpha - 4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, oder

etwas kompakter formuliert, $L_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta - 8}{\alpha - 4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Wir fassen die Lösung für alle Fälle zusammen:

$$L_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \emptyset & : \alpha = 4, \beta \neq 8 \\ \mathbf{u} + \text{Lin}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} & : \alpha = 4, \beta = 8 \\ \mathbf{u} + \frac{\alpha-4}{\beta-8}\mathbf{v} + \text{Lin}\{\mathbf{w}\} & : \alpha \neq 4 \end{cases}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.2

Satz 1.1 Angewandt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems verändern die elementaren Zeilenumformungen vom Typ (I), (II) und (III) die Menge der Lösungen nicht. \diamond

Wir beweisen Satz 1.1 mithilfe der folgenden Teilergebnisse.

Lemma 1.2 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ bezeichne mit

$$(A|\mathbf{b}) \xrightarrow{I;i,j} (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (I) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile $_i$ und Zeile $_j$ umgetauscht werden, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls \mathbf{x} eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist \mathbf{x} eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. \diamond

Beweis. Betrachte den Fall $i < j$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b}) \\ \implies & \begin{cases} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und } (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und } (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \dots \\ \text{und } (a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j) \\ \dots \\ \text{und } (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und } (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und } (a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j) \\ \dots \\ \text{und } (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \dots \\ \text{und } (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{cases} \end{aligned}$$

da lediglich zwei Aussagen in einer Konjunktion umgetauscht werden

$$\implies \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A'|\mathbf{b}'), \text{ da } (A|\mathbf{b}) \xrightarrow{I;i,j} (A'|\mathbf{b}').$$

Der Fall $i > j$ lässt sich analog zeigen. Falls $i = j$ bleibt das System unverändert, sodass die Behauptung trivialerweise gilt. \blacksquare

Lemma 1.3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezeichne mit

$$(A|\mathbf{b}) \xrightarrow{II;i,\alpha} (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (II) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile $_i$ durch α -Zeile $_i$ ersetzt wird, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls \mathbf{x} eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist \mathbf{x} eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. \diamond

Beweis. Es gilt

$$\mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (\alpha \cdot (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n) = \alpha \cdot b_i) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (\alpha \cdot a_{i,1}x_1 + \alpha \cdot a_{i,2}x_2 + \dots + \alpha \cdot a_{i,n}x_n = \alpha \cdot b_i) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{array} \right. \end{aligned}$$

\mathbf{x} eine Lösung für $(A'|\mathbf{b})'$, da $(A|\mathbf{b}) \xrightarrow{II;i,\alpha} (A'|\mathbf{b}')$.

Also gilt die Behauptung. ■

Lemma 1.4 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne mit

$$(A|\mathbf{b}) \xrightarrow{III;i,j,\alpha} (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (III) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile _{i} durch die Addition von Zeile _{i} mit α -Zeile _{j} ersetzt wird, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls \mathbf{x} eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist \mathbf{x} eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ◇

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{x eine Lösung für } (A|\mathbf{b}) \\ (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n + \alpha \cdot b_j = b_i + \alpha \cdot b_j) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n + \alpha \cdot a_{j,1}x_1 + \alpha \cdot a_{j,2}x_2 + \dots + \alpha \cdot a_{j,n}x_n = b_i + \alpha \cdot b_j) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{array} \right. \end{aligned}$$

da laut der j -ten Gleichung gilt $b_j = \sum_{k=1}^m a_{j,k}x_k$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} \\ (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a'_{i,1}x_1 + a'_{i,2}x_2 + \dots + a'_{i,n}x_n = b'_i) \\ \dots \\ \text{und} \\ (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m), \end{array} \right.$$

wobei $a'_{i,k} = a_{i,k} + \alpha \cdot a_{j,k}$ für alle k und $b'_i = b_i + \alpha \cdot b_j$

$\Rightarrow \mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b})'$, da $(A|\mathbf{b}) \xrightarrow{III;i,j,\alpha} (A'|\mathbf{b}')$.

Also gilt die Behauptung. ■

Endlich können wir Satz 1.1 beweisen:

Beweis (von Satz 1.1). Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Seien $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$, so dass $(A|\mathbf{b})$ durch eine Transformation der Art (I), (II) oder (III) aus $(A|\mathbf{b})$ entsteht. Das heißt, entweder

$$\begin{aligned} & (A|\mathbf{b}) \xrightarrow{I;i,j} (A'|\mathbf{b}') \\ \text{oder} & (A|\mathbf{b}) \xrightarrow{I;i,\alpha} (A'|\mathbf{b}') \\ \text{oder} & (A|\mathbf{b}) \xrightarrow{III;i,j,\alpha} (A'|\mathbf{b}') \end{aligned} \tag{1.1}$$

gilt, für ein $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zu zeigen:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b})\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A'|\mathbf{b}')\}. \tag{1.2}$$

Wir zeigen dies in zwei Teile:

(\subseteq .)

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Element aus der linken Menge, d. h. \mathbf{x} ist eine Lösung zu $(A|\mathbf{b})$. Laut Lemma 1.2 + Lemma 1.3 + Lemma 1.4 und wegen (1.1) erhalten wir, dass \mathbf{x} eine Lösung zu $(A'|\mathbf{b}')$ ist, d. h. \mathbf{x} liegt in der rechten Menge. Also ist die linke Menge in der rechten enthalten.

(\supseteq .)

Man beachte zuerst, dass sich die Transformation in (1.1) umkehren lässt— und zwar durch Elementartransformationen. Es ist einfach zu sehen, dass entweder

$$\begin{aligned} & (A'|\mathbf{b}') \xrightarrow{I;i,j} (A|\mathbf{b}) \\ \text{oder} & (A'|\mathbf{b}') \xrightarrow{I;i,\alpha^{-1}} (A|\mathbf{b}) \\ \text{oder} & (A'|\mathbf{b}') \xrightarrow{III;i,j,-\alpha} (A|\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Die Situation ist also analog zum \subseteq -Teil. Darum gilt die \supseteq -Inklusion in (1.2). ■

Aufgabe 1.3

Für diese Aufgabe wird das Konzept der *linearen Unabhängigkeit* aus Kapitel 5 angewandt.

Definition 1.5 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, und $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$. Bezeichne mit $(A|\mathbf{b})_I$ die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$, die auf die Zeilen mit Indexes aus I (in bspw. aufsteigender Reihenfolge) reduziert ist. \diamond

Beispiel 1.6 Für $(A|\mathbf{b})$ gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 0 & -7 \\ 4 & -6 & -10 & 6 \\ -2 & -6 & -6 & 9 \\ -7 & 4 & -1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 & -9 \\ -5 & 8 & -7 & -5 \end{array} \right)$$

und $I = \{2, 5, 6\}$ ist $(A|\mathbf{b})_I$ gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -10 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & -9 \\ -5 & 8 & -7 & -5 \end{array} \right).$$

Mit diesem Mittel können wir nun die Hauptaussage in der Aufgabe formulieren:

Satz 1.7 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Falls $(A|\mathbf{b})$ unlösbar ist, dann existiert $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist. \diamond

Beweis. Es stehen nun die *Zeilen* der Matrix A im Fokus. Wir verwandeln diese in Vektoren, d. h. setze

$$\mathbf{z}^{(i)} \in \mathbb{R}^n \text{ die } i\text{-te Zeile von } A \text{ als Vektor geschrieben}$$

für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Da $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, können wir eine *maximale Menge* $I_0 \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ finden, so dass $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0}$ aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Wegen der Dimension von \mathbb{R}^n gilt $|I_0| \leq \min\{m, n\} = n$. Sei $k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I_0$ beliebig. Wegen Maximalität muss $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0 \cup \{k\}}$ *linear abhängig* sein. Und wegen der linearen Unabhängigkeit von $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0}$ existieren (eindeutige) Koeffizienten $c_{k,i} \in \mathbb{R}$ für $i \in I_0$ so dass

$$\mathbf{z}^{(k)} = \sum_{i \in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)} \tag{1.3}$$

gilt.

Um nun die Hauptaussage zu zeigen, nehmen wir an, dass $(A|\mathbf{b})$ unlösbar ist. **Zu zeigen:** Es gibt eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist.

Angenommen, dies sei nicht der Fall. Aus dieser Annahme leiten wir folgende Behauptungen ab:

Behauptung 1. Die Verhältnisse zwischen den Zeilenvektoren in (1.3) gelten auch für die Einträge aus \mathbf{b} . Das heißt

$$b_k = \sum_{i \in I_0} c_{k,i} b_i \tag{1.4}$$

für alle $k \in \{1, 2, \dots, m + 1\} \setminus I_0$.

Bew. Sei $k \in \{1, 2, \dots, m + 1\} \setminus I_0$ beliebig. Da $|I_0| \leq n < n + 1$ lässt sich eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ wählen, mit $I \supseteq I_0 \cup \{k\}$ und $|I| = n + 1$. Dann per *Annahme* ist $(A|\mathbf{b})_I$ lösbar. Das heißt, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \tag{1.5}$$

für alle $i \in I$ gilt. Da $k \in I$ und $I_0 \subseteq I$ und wegen (1.3) erhalten wir nun das Verhältnis

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{z}^{(k)})_j x_j \\ &\quad \text{da die Einträge der } k\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(k)} \text{ entsprechen} \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)} \right)_j x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_0} c_{k,i} z_j^{(i)} x_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n z_j^{(i)} x_j \\
&= \sum_{i \in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \\
&\quad \text{da die Einträge der } i\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(i)} \text{ entsprechen} \\
&\stackrel{(1.5)}{=} \sum_{i \in I_0} c_{k,i} b_i.
\end{aligned}$$

Darum gilt die Behauptung. ⇐ (Beh. 1)

Behauptung 2. Es gibt eine Lösung zu $(A|\mathbf{b})$.

Bew. Da $|I_0| \leq n < n+1$ lässt sich eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ wählen, so dass $I \supseteq I_0$ und $|I| = n+1$. Dann per *Annahme* ist $(A|\mathbf{b})_I$ lösbar. Das heißt, ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \tag{1.6}$$

für alle $i \in I$ gilt. Da $I \supseteq I_0$ können wir **Behauptung 1** und die Verhältnisse in (1.3) anwenden. Für jedes $k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{z}^{(k)})_j x_j \\
&\quad \text{da die Einträge der } k\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(k)} \text{ entsprechen} \\
&\stackrel{(1.3)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)} \right)_j x_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_0} c_{k,i} z_j^{(i)} x_j \\
&= \sum_{i \in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n z_j^{(i)} x_j \\
&= \sum_{i \in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \\
&\quad \text{da die Einträge der } i\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(i)} \text{ entsprechen} \\
&\stackrel{(1.6)}{=} \sum_{i \in I_0} c_{k,i} b_i \\
&\stackrel{\text{Beh. 1}}{=} b_k
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nicht nur eine Lösung zu Zeile i des LGS, $(A|\mathbf{b})$, für jedes $i \in I$, sondern auch für jedes $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$. Das heißt, \mathbf{x} ist eine Lösung des LGS $(A|\mathbf{b})$. Also ist $(A|\mathbf{b})$ lösbar. ⇐ (Beh. 2)

Laut **Behauptung 2** ist also $(A|\mathbf{b})$ lösbar. Dies ist aber ein Widerspruch! Darum stimmt die *Annahme* oben nicht. Also gibt es *doch* eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ mit $|I| = n+1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist. Damit wurde die zu zeigende Implikation bewiesen. ■ (Satz 1.7)

Bemerkung 1.8 Falls man sich aber auf rudimentäre Mitteln beschränken will, kann man alternativ wie folgt vorgehen. Man wende zuerst das Gaußverfahren an und erhalte somit eine Folge

$$(A^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}) \rightsquigarrow (A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}) \rightsquigarrow (A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow (A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$$

wobei $N \in \mathbb{N}$, $A^{(0)} = A$, $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$, $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$ eine erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform ist, und jede der » \rightsquigarrow « Übergänge jeweils eine Transformation der Art (I), (II), oder (III) bezeichnet. Da $m > n$ sieht nun die Zeilenstufenform, also $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$, folgendermaßen aus:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
\underbrace{00 \dots 0}_{\ell_1} & \gamma_1 & \dots & * & \dots & \dots & * & \dots & b_1^{(N)} \\
00 \dots 0 & 0 & \underbrace{00 \dots 0}_{\ell_2} & \gamma_2 & \dots & \dots & * & \dots & b_2^{(N)} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
00 \dots 0 & 0 & 00 \dots 0 & 0 & \dots & \underbrace{00 \dots 0}_{\ell_r} & \gamma_r & \dots & b_r^{(N)} \\
00 \dots 0 & 0 & 00 \dots 0 & 0 & \dots & 00 \dots 0 & 0 & \dots & b_{r+1}^{(N)} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
00 \dots 0 & 0 & 00 \dots 0 & 0 & \dots & 00 \dots 0 & 0 & \dots & b_m^{(N)}
\end{array} \right)$$

wobei $r \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Stufen ist, $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r \in \mathbb{N}_0$, und $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Hauptkoeffizienten der Stufen sind. Es muss nun $0 \leq r \leq \min\{m, n\} = n$ gelten.

Jetzt kann man leicht dafür argumentieren, dass (1) die Zeilenstufenform, $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$, die Implikation erfüllt. Dann aufgrund der Umkehrbarkeit der Elementartransformationen, reicht es aus zu zeigen, dass (2): wenn $(A', \mathbf{b}') \rightsquigarrow (A'', \mathbf{b}'')$ und wenn (A', \mathbf{b}') die Implikation erfüllt, dann erfüllt (A'', \mathbf{b}'') die Implikation. Dies ist nur etwas mühseliger und die Argumentation von (2) führt letzten Endes zu ähnlichen Ideen, die im Beweis oben vorkommen. ◇

Übungsserie 2

Woche 2

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variante anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 2.1

Satz 2.1 (vgl. [Sin20, Korollar 1.3.3]). Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} wie \mathbb{R}^n für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ und sei

$$L := \{s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

die Verbindungsgerade zw. \mathbf{v} und \mathbf{w} . Dann gilt $\mathbf{0} \in L \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}$. ◇

Beweis. Der Beweis wird in zwei Teilen gezeigt.

(\implies). Angenommen, $\mathbf{0} \in L$. **Zu zeigen:** $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}$.

Per Definition von L existiert ein $s \in \mathbb{R}$, so dass sich $\mathbf{0}$ als $\mathbf{0} = s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w}$ darstellen lässt. Daraus lässt sich ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w} &\iff s\mathbf{v} = (s-1)\mathbf{w} \\ &\iff \underbrace{(s=0 \text{ und } \mathbf{w} = s(\mathbf{w}-\mathbf{v}) = \mathbf{0})}_{\text{unmöglich, da } \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \text{ per Voraussetzung}} \text{ oder } (s \neq 0 \text{ und } \mathbf{v} = ((s-1)/s)\mathbf{w}) \\ &\iff s \neq 0 \text{ und } \mathbf{v} = ((s-1)/s)\mathbf{w} \\ &\implies \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}. \end{aligned}$$

(\impliedby). Angenommen, $\mathbf{v} = c\mathbf{w}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. **Zu zeigen:** $\mathbf{0} \in L$.

Per Voraussetzung gilt nun $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, sodass $c = 1$ direkt ausgeschlossen ist.

Setze nun $s := \frac{1}{1-c} \in \mathbb{R}$, was wohldefiniert ist, da $c \neq 1$.

Man berechnet nun

$$\overbrace{s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w}}^{\in L, \text{ per Definition}} = \frac{1}{1-c}c\mathbf{w} + \left(1 - \frac{1}{1-c}\right)\mathbf{w} = \underbrace{\left(\frac{c}{1-c} + 1 - \frac{1}{1-c}\right)}_{=\frac{c-1}{1-c}+1=0}\mathbf{w} = 0\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Darum gilt $\mathbf{0} \in L$. ■

Aufgabe 2.2

(a) **Satz 2.2** Seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$. Seien $L := \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $L' := \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\}$. Angenommen, $L \neq L'$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $L \cap L' = \emptyset$;
- (ii) \mathbf{w}, \mathbf{w}' sind kollinear, d. h. $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = c\mathbf{w}'$.

◇

Beweis. Der Beweis wird in zwei Teilen gezeigt.

((ai) \implies (aii)). Angenommen, $L \cap L' = \emptyset$. **Zu zeigen:** $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = c\mathbf{w}'$.

Angenommen, dies sei nicht der Fall.

Da $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$ bedeutet dies, dass \mathbf{w}, \mathbf{w}' linear unabhängig sind. (\rightarrow Warum??)

Also gilt für den Untervektorraum $U := \text{Lin}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$, dass $\dim(U) = 2$.

Da $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Vektorräume sind und $\dim(U) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, folgt hieraus, dass $U = \mathbb{R}^2$. (\rightarrow Warum??)

Betrachte bspw. den Vektor

$$\xi := \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Dann $\xi \in U = \text{Lin}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$. Folglich existieren Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}' = \xi$ gilt.

Setze nun $t := \alpha$ und $s := -\beta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{v} + t\mathbf{w}}_{\in L} &= (\mathbf{v} + t\mathbf{w}) - (\mathbf{v}' + s\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (t\mathbf{w} - s\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\ &\stackrel{(2.1)}{=} -\xi + \xi + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' = \underbrace{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}'}_{\in L'}. \end{aligned}$$

Darum gilt $L \cap L' \neq \emptyset$, was ein Widerspruch ist.

Darum stimmt die o. s. Annahme nicht. Also sind \mathbf{w}, \mathbf{w}' kollinear.

((aii) \implies (ai)). Angenommen, $\mathbf{w} = c\mathbf{w}'$ für ein $c \in \mathbb{R}$. **Zu zeigen:** $L \cap L' = \emptyset$.

Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existiert ein Vektor, $\mathbf{u} \in L \cap L'$.

Per Konstruktion existieren dann $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathbf{v} + t_0\mathbf{w} = \mathbf{u} = \mathbf{v}' + s_0\mathbf{w}'.$$

Aus der Voraussetzung für diese Richtung folgt

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (t_0 - s_0c)\mathbf{w} \quad (2.2)$$

Beachte, dass $c \neq 0$, denn sonst würde $\mathbf{w} = c\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ gelten, was ein Widerspruch ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} L' &= \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \{\mathbf{v} + (t_0 - s_0c)\mathbf{w} + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbf{v} + (t_0 + (s - s_0)c)\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in R\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei $R = \{t_0 + (s - s_0)c \mid s \in \mathbb{R}\} = f(\mathbb{R})$. Also $R = f(\mathbb{R})$, wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine durch $f(s) = t_0 + (s - s_0)c$ definierte Funktion ist. Da $c \neq 0$, ist es einfach zu sehen, dass f surjektiv ist (in der Tat bijektiv). Darum gilt $R = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Aus (2.3) folgt also $L' = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} = L$, was ein Widerspruch ist.

Darum stimmt die o. s. Annahme nicht. Also gilt $L \cap L' = \emptyset$. ■

(b) Wir zeigen nun ein minimales Beispiel dafür, dass Satz 2.2 im allgemeinen für andere Vektorräume nicht gilt. Betrachte den Vektorraum \mathbb{R}^3 . Betrachte die folgenden Vektoren in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bis auf 2-Dimensionalität erfüllen diese die Voraussetzungen in Satz 2.2. Einerseits wurden \mathbf{w}, \mathbf{w}' so gewählt, dass sie *nicht* kollinear sind. Dennoch schneiden sich die beiden Geraden, L, L' , nicht, da $L \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} =: E$ und $L' \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1\} =: E'$ und offensichtlich $E \cap E' = \emptyset$.

Aufgabe 2.3

(a) Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ sei die Gerade $L_\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$L_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = \gamma \cdot (x - 3y - 7)\}.$$

Satz 2.3 Es gibt exakt einen Punkt in dem Schnitt aus den Geraden, L_γ , $\gamma \in \mathbb{R}$. Es gilt nämlich

$$\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} L_\gamma = \{\xi\}, \text{ wobei } \xi = (1, -2).$$

◇

Beweis. Wir teilen diesen Beweis in zwei Teilen auf:

(\supseteq). Es reicht aus, für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ **zu zeigen**, dass $\xi \in L_\gamma$.

Fixiere also ein beliebiges $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 &= 2 \cdot 1 + (-2) &= 0, & \text{ und} \\ \gamma \cdot (\xi_1 - 3\xi_2 - 7) &= \gamma \cdot (1 - 3(-2) - 7) &= \gamma \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Also $2\xi_1 + \xi_2 = \gamma \cdot (\xi_1 - 3\xi_2 - 7)$. Folglich gilt $\xi \in L_\gamma$ per Konstruktion.

(\subseteq). Sei $\eta := (x, y) \in \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} L_\gamma$ beliebig. **Zu zeigen:** $\eta = \xi$.

Zu diesem Zwecke seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ irgendwelche Werte mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Per Wahl gilt $\eta \in L_{\gamma_1} \cap L_{\gamma_2}$. Also

$$\begin{aligned} 2x + y &= \gamma_1 \cdot (x - 3x - 7), \text{ und} \\ 2x + y &= \gamma_2 \cdot (x - 3x - 7). \end{aligned}$$

Wir können ganz naiv arbeiten und die Gleichungen subtrahieren. Dies liefert $(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot (x - 3x - 7) = 0$, woraus sich ergibt, dass $x - 3y - 7 = 0$ gelten muss, da $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Eingesetzt in die erste Gleichung oben liefert $2x + y = \gamma \cdot 0 = 0$. Darum muss $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das LGS $(A|\mathbf{b})$ lösen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußverfahren angewandt auf $(A|\mathbf{b})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -14 \end{array} \right)$$

Aus der Stufenform erschließt sich

$$\begin{aligned} y &= \frac{-14}{7} &= -2 \\ x &= 7 + 3 \cdot y &= 1. \end{aligned}$$

Also $\eta = (x, y) = (1, -2) = \xi$ für alle $\eta \in \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} L_\gamma$. Das heißt $\bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} L_\gamma \subseteq \{\xi\}$. ■

(b) (i) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(-3, 2) \in L_\gamma &\iff 2(-3) + (2) = \gamma \cdot ((-3) - 3(2) - 7) \\ &\iff \gamma = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Also ist $\boxed{\gamma = \frac{1}{4}}$ der eindeutige Parameter, für den $(-3, 2) \in L_\gamma$ gilt.

(ii) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Man beobachte, dass

$$\begin{aligned}L_\gamma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2 - \gamma)x + (1 + 3\gamma)y = -7\gamma\} \\ &= \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + (1 + 3 \cdot 2)y = -7 \cdot 2\} & : \gamma = 2 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2 - \frac{-1}{3})x + 0y = -7 \cdot \frac{-1}{3}\} & : \gamma = -\frac{1}{3} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2 - \gamma)x + (1 + 3\gamma)y = -7\gamma\} & : \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\} & : \gamma = 2 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\} & : \gamma = -\frac{1}{3} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\gamma-2}{1+3\gamma}x - \frac{7\gamma}{1+3\gamma}\} & : \text{sonst} \end{cases} .\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass L_γ

- parallel zur x -Achse für $\gamma = 2$ ist,
- parallel zur y -Achse für $\gamma = -\frac{1}{3}$ ist,
- und ansonsten weder zur x - noch y -Achse parallel ist, da in diesem Falle L_γ die Gerade $\gg y = ax + b \ll$ ist, wobei $a \neq 0$.

Also ist der gesuchte Parameterwert eindeutig $\boxed{\gamma = -\frac{1}{3}}$.

(iii) Die Gerade $\gg x - 2y = -1 \ll$ lässt sich äquivalent als $\gg y = \frac{1}{2}x + 1 \ll$ darstellen. Darum wird ein Wert $\gamma \in \mathbb{R}$ gesucht, so dass die Gerade L_γ weder zur x - noch y -Achse parallel ist, und die die y - x -Steigung $\frac{1}{2}$ hat. Nach der o. s. Berechnung in (ii) kommt dies nur für den 3. Fall in Frage. Darum gilt

$$\begin{aligned}L_\gamma \text{ parallel zur Gerade } \gg x - 2y = -1 \ll &\iff \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } \frac{\gamma-2}{1+3\gamma} = \frac{1}{2} \\ &\iff \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } (\gamma - 2) = \frac{1}{2}(1 + 3\gamma) \\ &\iff \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } \gamma = -5 \\ &\iff \gamma = -5.\end{aligned}$$

Also ist der gesuchte Parameterwert eindeutig $\boxed{\gamma = -5}$.

Übungsserie 3

Woche 3

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variante anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 3.1

Wir arbeiten im Vektorraum \mathbb{R}^3 und betrachten die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu berechnen: $U := \text{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap \text{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ als Untervektorraum von \mathbb{R}^3 .

Zu diesem Zwecke betrachte einen beliebigen Vektor, $\xi \in \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\begin{aligned} \xi \in U &\iff \exists t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R} : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } \xi = t_3 \mathbf{w}_1 + t_4 \mathbf{w}_2 \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 = t_3 \mathbf{w}_1 + t_4 \mathbf{w}_2 \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 - t_3 \mathbf{w}_1 - t_4 \mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + t_3 \mathbf{w}_1 + t_4 \mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } A \mathbf{t} = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei

$$A := (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Darum ist es notwendig und hinreichend, die *homogenen Lösungen* für A zu finden, und daraus die Parameter abzulesen.

Homogenes Problem für A :

Zeilentransformationen $Z_2 \leftarrow Z_2 - 3 \cdot Z_1$, $Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_3$ an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Zeilenstufenform erschließt sich, dass t_4 frei ist. Also $t_4 = \alpha$ für ein frei wählbares $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aus der Stufenform von Gleichungen 3, 2, 1 erschließt sich

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{1}{7} t_4 = \frac{1}{7} \alpha \\ t_2 &= \frac{8}{11} t_3 = \frac{8}{77} \alpha \\ t_1 &= 2t_2 - 4t_3 = \frac{16}{77} \alpha - \frac{4}{7} \alpha = -\frac{28}{77} \alpha \end{aligned}$$

Man kann o. E. α durch $\beta := -77\alpha$ ersetzen. Also ist die homogene Lösung gegeben durch

$$\mathbf{t} = \beta \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Wir können nun (3.1) fortsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\xi \in U &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } A\mathbf{t} = \mathbf{0} \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \text{ und } \exists \beta \in \mathbb{R} : \mathbf{t} = \beta \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists \beta \in \mathbb{R} : \xi = \beta \cdot \underbrace{(28\mathbf{v}_1 + -8\mathbf{v}_2)}_{=:\mathbf{u}} \\
&\iff \xi \in \text{Lin}\{\mathbf{u}\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$.
Es gilt

$$\mathbf{u} = 28 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 44 \\ 44 \end{pmatrix} = 44 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus (3.2) ergibt sich der zu berechnende Untervektorraum als

$$\text{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap \text{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = U = \text{Lin}\{\mathbf{u}\} = \text{Lin}\left\{44 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Aufgabe 3.2

Seien X, Y nicht leere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion.

(a) **Behauptung.** Die Aussage $\forall A, B \subseteq X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ist nicht allgemein gültig. ◇

Beweis. Betrachte das Beispiel $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, und $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = 2$ für alle $x \in X$. Für $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ gilt $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, während $f(A) \cap f(B) = \{2\} \cap \{2\} = \{2\}$. Also $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Darum ist dies ein Gegenbeispiel zur Aussage. ■

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich genau dann wahr, wenn f injektiv ist.

(b) **Behauptung.** Die Aussage $\forall A, B \subseteq X : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ist allgemein gültig. ◇

Für manche (doppelte) Implikationen hier, nämlich für den Umgang mit Existenzquantoren, braucht man Grundkenntnisse in Prädikatenlogik 1. Stufe. Hierfür gibt es zahlreiche Einführungswerke in die mathematische Logik, bspw. [?].

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$ für alle $y \in Y$ gilt.

Sei also $y \in Y$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
 y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B : y = f(x) \\
 &\iff \exists x \in X : x \in A \cup B \text{ und } y = f(x) \\
 &\iff \exists x \in X : (x \in A \text{ oder } x \in B) \text{ und } y = f(x) \\
 &\iff \exists x \in X : ((x \in A \text{ und } y = f(x)) \text{ oder } (x \in B \text{ und } y = f(x))) \\
 &\iff \exists x \in X : (x \in A \text{ und } y = f(x)) \text{ oder } \exists x \in X : (x \in B \text{ und } y = f(x)) \\
 &\iff \exists x \in A : y = f(x) \text{ oder } \exists x \in B : y = f(x) \\
 &\iff y \in f(A) \text{ oder } y \in f(B) \\
 &\iff y \in f(A) \cup f(B).
 \end{aligned}$$

Darum gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$. ■

(c) **Behauptung.** Die Aussage $\forall A \subseteq X : f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ ist nicht allgemein gültig. ◇

Beweis. Betrachte das Beispiel $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, und $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = 2$ für alle $x \in X$. Für $A = \{0\}$ gilt $f(X \setminus A) = f(\{1\}) = \{2\}$, während $Y \setminus f(A) = \{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$. Also $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$. Darum ist dies ein Gegenbeispiel zur Aussage. ■

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich genau dann wahr, wenn f bijektiv ist. Und eine leicht modifizierte Aussage, $\forall A \subseteq X : f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$, ist genau dann wahr, wenn f injektiv ist.

(d) **Behauptung.** Die Aussage $\forall A, B \subseteq Y : f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ist allgemein gültig. ◇

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $x \in X$ gilt.

Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\
 &\iff f(x) \in A \text{ und } f(x) \in B \\
 &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ und } x \in f^{-1}(B) \\
 &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).
 \end{aligned}$$

Darum gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$. ■

(e) **Behauptung.** Die Aussage $\forall A, B \subseteq Y : f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ist allgemein gültig. ◇

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $x \in X$ gilt.

Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ oder } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ oder } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).\end{aligned}$$

Darum gilt $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$. ■

Aufgabe 3.3

- (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = x + v$ definiert.

Behauptung. f ist bijektiv. ◇

Beweis. Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $g(x) = x - v$ definiert. Es ist einfach zu sehen, dass $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Per Definition ist also f eine Bijektion mit Inversem g . ■

- (b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Sei Y die Menge aller Geraden im \mathbb{R}^n . Sei $f : X \rightarrow Y$ durch $f(v, w) = \{v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$ definiert.

Behauptung. f ist surjektiv aber nicht injektiv. ◇

Beweis. Surjektivität

Idee: Folgt aus der Definition von Geraden durch Parameter.

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Gerade. **Zu zeigen:** $L \in f(X)$.

Nun, *per Definition* einer Geraden existieren $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq 0$ und so dass $L = \{u + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$. Offensichtlich gilt $(v, w) \in X$. Darum gilt $L = f((v, w)) \in f(X)$.

Nichtinjektivität

Idee: Wir wissen, dass verschiedene aber parallele Vektoren dieselbe Gerade definieren.

Fixiere beliebiges $v, w \in \mathbb{R}^n$ und wähle ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Dann sind $w, cw \neq 0$ verschiedene aber parallele Vektoren.

Darum gilt $f((v, w)) = \{v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\} = \{v + tc \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\} = f((v, cw))$.

Da $(v, w) \neq (v, cw)$, ist f somit nicht injektiv. ■

- (c) Es sei X die Menge aller Bücher in einem fixierten Kontext. Sei Y die Menge alle Autor(inn)en von Büchern. Sei $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ definiert durch $f(x) = \{y \mid y \text{ ein(e) Autor(in) vom Buch } x\}$ für alle $x \in X$.

Behauptung. f ist nicht im Allgemeinen injektiv und niemals surjektiv. ◇

Beweis. Nichtsurjektivität

Zu zeigen: Es gibt Konstellationen von Autor(inn)en, die kein gemeinsames Buch verfasst haben.

Es gibt *immer* eine(n) Autor(in) eines Buchs, sodass $\emptyset \notin f(X)$ in allen Kontexten. Darum ist f niemals surjektiv.

Nichtinjektivität

Zu zeigen: Es gibt zwei verschiedene Bücher, die von der gleichen Konstellation an Autor(inn)en verfasst wurden. In unserem Kontext hat bspw. $a = JK \text{ Rowling}$ alleine die Bücher $b_1 := \text{»HP and the Philosopher's Stone«}$ und $b_2 := \text{»HP and the Goblet of Fire«}$ geschrieben. Darum $b_1 \neq b_2$ und $f(b_1) = \{a\} = f(b_2)$. Also ist f in unserem Kontext nicht injektiv. ■

Anmerkung. Falls wir \emptyset von der Bildmenge $\mathcal{P}(Y)$ excludieren, dann können wir mindestens dafür argumentieren, dass f nicht im Allgemeinen surjektiv ist: In unserem konkreten Kontext haben bspw. $JK \text{ Rowling}$ und $Oscar \text{ Wilde}$ nie am selben Buch gearbeitet, also gilt $\{JK \text{ Rowling}, Oscar \text{ Wilde}\} \notin f(X)$. In der Tat ist ein Kontext kaum vorstellbar, in dem sich *alle* Autor(inn)en an einem gemeinsamen Buch beteiligt haben, d. h. $Y \in f(X)$ sowie alle „große“ Teilmengen sind fast immer ausgeschlossen.

- (d) Seien X die Menge aller in Deutschland zugelassener Kfz und Y die Menge aller amtlicher Kennzeichen. Sei $f : X \rightarrow Y$ die Abbildung, die jedem Kfz sein Kennzeichen zuordnet.

Behauptung. f ist injektiv aber nicht im Allgemeinen surjektiv. ◇

Beweis. Injektivität: Jedes Kennzeichen darf per Gesetz nur einem Kfz zugehören. **Nichtsurjektivität:** Es besteht zwar die Chance, dass irgendwann alle Kennzeichen aufgebraucht werden, aber in der Praxis ist die Menge Y sehr groß, dass dies aktuell und für eine lange Zeit nicht vorkommt. ■

Übungsserie 4

Woche 4

Aufgabe 4.1

(a) Betrachte die Menge $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und die binäre Relation, $\sim \subseteq X \times X$, die durch

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b$$

für $(a, b), (a', b') \in X$ definiert wird.

Behauptung. (X, \sim) ist eine Äquivalenzrelation. ◇

Beweis. Wir gehen die Axiome durch:

Reflexivität: Sei $(a, b) \in X$ beliebig.

Zu zeigen: $(a, b) \sim (a, b)$.

Offensichtlich gilt $ab = ab$.

Per Konstruktion gilt also $(a, b) \sim (a, b)$.

Symmetrie: Seien $(a, b), (a', b') \in X$ beliebig.

Zu zeigen: $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (a', b') &\iff ab' = a'b && \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies a'b = ab' \\ &\iff (a', b') \sim (a, b) && \text{(per Konstruktion)}. \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in X$ beliebig.

Zu zeigen: $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'') \Rightarrow (a, b) \sim (a'', b'')$.

Es gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (a', b') \\ \text{und } (a', b') \sim (a'', b'') &\iff ab' = a'b \text{ und } a'b'' = a''b' \\ &\quad \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies (ab'')b' = (ab')b'' = (a'b)b'' = (a'b'')b = (a''b')b = (a''b)b' \\ &\implies ab'' = a''b, \\ &\quad \text{da } b' \neq 0 \\ &\iff (a, b) \sim (a'', b'') \\ &\quad \text{(per Konstruktion)}. \end{aligned}$$

Darum erfüllt (X, \sim) die Axiome einer Äquivalenzrelation. ■

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $f : X/\sim \rightarrow \mathbb{Q}$ definiert durch $f([(a, b)]) = a/b$ wohldefiniert und bijektiv ist. In der Tat realisieren manche Werke die rationalen Zahlen, \mathbb{Q} , als genau diesen Quotientenraum, d. h. man kann die Äquivalenzklassen hier als rationale Zahlen deuten.

(b) Betrachte die Menge $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und die binäre Relation, $\leq \subseteq X \times X$, die durch

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \text{ und } b \leq b'$$

für $(a, b), (a', b') \in X$ definiert wird.

Behauptung. (X, \leq) ist eine partielle Ordnung aber nicht total. ◇

Beweis. Wir gehen die Axiome durch:

Reflexivität: Sei $(a, b) \in X$ beliebig.

Zu zeigen: $(a, b) \leq (a, b)$.

Offensichtlich gilt $a \leq a$ und $b \leq b$.

Per Konstruktion gilt also $(a, b) \leq (a, b)$.

Antisymmetrie: Seien $(a, b), (a', b') \in X$ beliebig.

Zu zeigen: $(a, b) \leq (a', b')$ und $(a', b') \leq (a, b) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$.

Es gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \leq (a', b') \\ \text{und } (a', b') \leq (a, b) &\iff a \leq a' \text{ und } b \leq b' \text{ und } a' \leq a \text{ und } b' \leq b \\ &\quad \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies a = a' \text{ und } b = b', \\ &\quad \text{da } (\mathbb{Z}, \leq) \text{ antisymmetrisch ist} \\ &\iff (a, b) = (a', b'). \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in X$ beliebig.

Zu zeigen: $(a, b) \leq (a', b')$ und $(a', b') \leq (a'', b'') \Rightarrow (a, b) \leq (a'', b'')$.

Es gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \leq (a', b') \\ \text{und } (a', b') \leq (a'', b'') &\iff a \leq a' \text{ und } b \leq b' \text{ und } a' \leq a'' \text{ und } b' \leq b'' \\ &\quad \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies a \leq a'' \text{ und } b \leq b'', \\ &\quad \text{da } (\mathbb{Z}, \leq) \text{ transitiv ist} \\ &\iff (a, b) \leq (a'', b'') \\ &\quad \text{(per Konstruktion).} \end{aligned}$$

Darum erfüllt (X, \leq) die einer partiellen Ordnung.

Zum Schluss, beachte, dass $(0, 1)$ und $(1, 0)$ bzgl. \leq unvergleichbar sind. Darum ist (X, \leq) nicht total. ■

Aufgabe 4.2

Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die binäre Relation $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mittels

$$a \sim b \iff \text{mod}(a, n) = \text{mod}(b, n)$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) **Behauptung.** (\mathbb{Z}, \sim) ist eine Äquivalenzrelation. ◇

Beweis. Wir gehen die Axiome durch:

Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a \sim a$.

Offensichtlich gilt $\text{mod}(a, n) = \text{mod}(a, n)$.

Per Konstruktion gilt also $a \sim a$.

Symmetrie: Seien $a, a' \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a \sim a' \Rightarrow a' \sim a$.

Es gilt

$$\begin{aligned} a \sim a' &\iff \text{mod}(a, n) = \text{mod}(a', n) && \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies \text{mod}(a', n) = \text{mod}(a, n) \\ &\iff a' \sim a && \text{(per Konstruktion)}. \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $a, a', a'' \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a \sim a'$ und $a' \sim a'' \Rightarrow a \sim a''$.

Es gilt

$$\begin{aligned} a \sim a' \text{ und } a' \sim a'' &\iff \text{mod}(a, n) = \text{mod}(a', n) \text{ und } \text{mod}(a', n) = \text{mod}(a'', n) \\ &\quad \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies \text{mod}(a, n) = \text{mod}(a'', n) \\ &\iff a \sim a'' \quad \text{(per Konstruktion)}. \end{aligned}$$

Darum erfüllt (\mathbb{Z}, \sim) die Axiome einer Äquivalenzrelation. ■

Bemerkung. Es gibt einen einfacheren Ansatz. Zunächst beweist man das allgemeine Lemma: Für jede Äquivalenzrelation (Y, \approx) und jede Relation (X, R) , falls eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ existiert, so dass $\forall x, x' \in X : (x, x') \in R \Leftrightarrow f(x) \approx f(x')$, so gilt dass (X, R) eine Äquivalenzrelation ist. Und jetzt wendet man dies auf unseren Kontext an: Wir die Äquivalenzrelation $(\{0, 1, 2, \dots, n-1\}, =)$ und die Relation (\mathbb{Z}, \sim) und eine Abbildung $f : a \in \mathbb{Z} \mapsto \text{mod}(a, n)$, für die $\forall a, a' \in \mathbb{Z} : (a, a') \in \sim \Leftrightarrow f(a) \approx f(a')$ per Konstruktion gilt. Darum ist (\mathbb{Z}, \sim) eine Äquivalenzrelation.

(b) **Behauptung.** Es gibt n Äquivalenzklassen. ◇

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z}/\sim &\rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\} \\ &: [a] \mapsto \text{mod}(a, n) \end{aligned}$$

Es reicht aus **zu zeigen**, dass ρ eine wohldefinierte Bijektion ist.

Wohldefiniertheit: Sei $C \in \mathbb{Z}/\sim$ beliebig. Seien $a, a' \in \mathbb{Z}$ mit $[a] = C$ und $[a'] = C$.

Zu zeigen: $\text{mod}(a, n) = \text{mod}(a', n)$.

Aus $[a] = C = [a']$ folgt $a \sim a'$ und damit per Konstruktion $\text{mod}(a, n) = \text{mod}(a', n)$. Darum ordnet ρ einem eindeutig Wert $[a]$ zu.

Injektivität: Seien $C, C' \in \mathbb{Z}/\sim$ beliebig. **Zu zeigen:** $\rho(C) = \rho(C') \Rightarrow C = C'$.

Wähle zunächst $a, a' \in \mathbb{Z}$, so dass $C = [a]$ und $C' = [a']$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(C) = \rho(C') &\implies \text{mod}(a, n) = \text{mod}(a', n) \\ &\implies a \sim a' \\ &\implies C = [a] = [a'] = C'. \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ beliebig. **Zu zeigen:** $k \in \rho(\mathbb{Z}/\sim)$.

Setze $C = [k] \in \mathbb{Z}/\sim$. Dann $\rho(C) = \text{mod}(k, n) = k$.^a Also gilt $k \in \rho(\mathbb{Z}/\sim)$.

Darum ist ρ eine Bijektion. Also gilt $|\mathbb{Z}/\sim| = |\{0, 1, \dots, n-1\}| = n$. ■

(c) Laut der Berechnung in Aufgabe 2(b) gilt $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$. Für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

^aSeien $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ mit $qn + r = k$. Da $k, r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, gilt $qn = k - r \in \mathbb{Z} \cap (-n, n)$. Das heißt, $k - r$ ist eine durch n teilbare ganze Zahl in $(-n, n)$. Die einzige solche Zahl ist 0. Also $k - r = 0$. Also $\text{mod}(k, n) = r = k$.

lässt sich die Äquivalenzklasse $[k]$ wie folgt als Teilmenge beschreiben

$$\begin{aligned}
 [k] &= \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim k\} \text{ per Definition} \\
 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \text{mod}(a, n) = \text{mod}(k, n)\} \\
 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \text{mod}(a, n) = k\} \\
 &= \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a = qn + k\} \\
 &= \{qn + k \mid q \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \mathbb{Z} \cdot n + k.
 \end{aligned}$$

Also lassen sich die Äquivalenzklassen durch die Teilmengen $\{\mathbb{Z} \cdot n + k \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$ darstellen.

Aufgabe 4.3

Behauptung. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit $\Phi(n)$ die Aussage, dass für alle Mengen X, Y mit $|X| = |Y| = n$

$$|\{f \mid f \text{ eine Bijektion zw. } X \text{ und } Y\}| = n!. \quad (4.1)$$

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ◇

Beweis (Ansatz I). Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien X, Y n -elementige Mengen. Sei (x_1, x_2, \dots, x_n) eine Auflistung der Elemente in X . Um eine Injektion zw. X und Y zu definieren, wählt man zuerst ein Element $y_1 \in Y$ für x_1 (dafür gibt es n Möglichkeiten), dann ein Element $y_2 \in Y$ für x_2 (dafür bleiben $n-1$ Möglichkeiten übrig), usw. Darum gibt es insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ Injektionen zwischen X und Y . Da X und Y endlich und gleichmächtig sind, ist jede Injektion zwischen diesen Mengen automatisch surjektiv und damit bijektiv. Darum gibt es $n!$ Bijektionen zwischen X und Y . ■ (Ansatz I)

Beweis (Ansatz II). Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n .

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Für 1-elementigen Mengen X, Y , gibt es offensichtlich exakt eine Funktion zwischen X und Y , und dies ist eine Bijektion. Darum gilt (4.1).

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 1$. Angenommen, $\Phi(n-1)$ gilt.

Induktionsschritt: Seien X, Y beliebige n -elementige Mengen. **Zu zeigen:** (4.1) gilt.

Fixiere $x_0 \in X$. Beobachte, dass für alle $y_0 \in Y$ die Mengen $X' := X \setminus \{x_0\}$ und $Y' := Y \setminus \{y_0\}$ beide $n-1$ -elementig sind. Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{array}{lcl}
 F & : & \{g \mid g \text{ Bij. zw. } X \setminus \{x_0\} \text{ und } Y \setminus \{y_0\}\} \rightarrow \{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y, f(x_0) = y_0\} \\
 & : & g \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \mapsto g \cup \{(x_0, y_0)\}.
 \end{array}$$

Das heißt, jede Bijektion $g : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$ wird durch F zu einer Funktion von X nach Y fortgesetzt, indem das zusätzliche Element, x_0 , auf y_0 abgebildet wird. Es ist einfach zu sehen, dass F wohldefiniert ist, d. h. für jede Bijektion $g : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y \setminus \{y_0\}$, es gilt, dass $F(g)$ eine wohldefinierte Funktion zwischen X und Y ist und weiterhin ist dies eine Bijektion. Außerdem ist es klar, dass die Abbildung

$$\begin{array}{lcl}
 G & : & \{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y, f(x_0) = y_0\} \rightarrow \{g \mid g \text{ Bij. zw. } X \setminus \{x_0\} \text{ und } Y \setminus \{y_0\}\} \\
 & : & f \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \mapsto f|_{X \setminus \{x_0\} \times Y \setminus \{y_0\}}
 \end{array}$$

die Abbildung F nach rechts und links invertiert. Also ist G eine Bijektion. Daraus folgt per Definition von Kardinalität

$$\begin{aligned}
 |\{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y, f(x_0) = y_0\}| &= |\{g \mid g \text{ Bij. zw. } X \setminus \{x_0\} \text{ und } Y \setminus \{y_0\}\}| \\
 &= (n-1)! \text{ laut IV.}
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Andererseits ist $(\{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y, f(x_0) = y_0\})_{y_0 \in Y}$ eine Partition von $\{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y\}$. Darum gilt

$$\begin{aligned}
 |\{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y\}| &= \left| \bigcup_{y_0 \in Y} \{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y, f(x_0) = y_0\} \right| \\
 &= \sum_{y_0 \in Y} |\{f \mid f \text{ Bij. zw. } X \text{ und } Y, f(x_0) = y_0\}| \\
 &\quad \text{wegen paarweise Disjunktheit} \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} \sum_{y_0 \in Y} (n-1)! = |Y| \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n!.
 \end{aligned}$$

Also gilt (4.1).

Darum gilt $\Phi(n)$ per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$. ■ (Ansatz II)

Übungsserie 5

Woche 5

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 5.1

Fixiere eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $a_i \in \{0, 1, \dots, 10 - 1\}$ die eindeutige Zahlen, so dass

$$n = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i 10^i$$

gilt.

(a) **Behauptung.** $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i$. ◇

Beweis. Beachte zunächst, dass $10 \equiv 1 \pmod{3}$. Also gilt modulo 3

$$n \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i 1^i \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i.$$

Folglich gilt

$$3 \mid n \iff n \equiv 0 \pmod{3} \iff \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i \equiv 0 \pmod{3} \iff 3 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i$$

wie behauptet. ■

(b) **Behauptung.** $11 \mid n \Leftrightarrow 1 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (-1)^i a_i$. ◇

Beweis. Beachte zunächst, dass $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Also gilt modulo 11

$$n \equiv \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i (-1)^i.$$

Folglich gilt

$$11 \mid n \iff n \equiv 0 \pmod{11} \iff \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i \equiv 0 \pmod{11} \iff 11 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (-1)^i a_i$$

wie behauptet. ■

Aufgabe 5.2

(a) Seien $a = 142$ und $b = 84$. Wir berechnen $\text{ggT}(a, b)$ mittels des Euklidischen Algorithmus (siehe [Sin20, Satz 3.4.7]).

Restberechnung (symbolisch)	Restberechnung (Werte)
$a = b \cdot q_1 + r_1$	$142 = 84 \cdot 1 + 58$
$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$84 = 58 \cdot 1 + 26$
$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$58 = 26 \cdot 2 + 6$
$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$	$26 = 6 \cdot 4 + \boxed{2}$
$r_3 = r_4 \cdot q_5 + r_5$	$6 = 2 \cdot 3 + 0$

Darum gilt $\text{ggT}(a, b) = r_2 = 2$.

(b) Behauptung 5.1 Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \neq 0$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = c$

(ii) $\text{ggT}(a, b) \mid c$

◇

Beweis. Fixiere zunächst $d := \text{ggT}(a, b)$. Da $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ist $d \in \mathbb{N}$ eine wohldefinierte positive Zahl.

((bi) \implies (bii)). Angenommen, $ax + by = c$ für ein $x, y \in \mathbb{Z}$.

Da $x, y \in \mathbb{Z}$, erhalten wir $c = ax + by \equiv 0x + 0y \equiv 0$ modulo d .

Also $\text{ggT}(a, b) = d \mid c$.

((bii) \implies (bi)). Angenommen, $\text{ggT}(a, b) \mid c$.

Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $c = k \cdot \text{ggT}(a, b)$.

Laut des Lemmas von Bézout (siehe [Sin20, Lemma 3.4.8]) existiere nun $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass $\text{ggT}(a, b) = au + bv$.

Daraus folgt $c = k \cdot \text{ggT}(a, b) = aku + bk v$.

Da $ku, kv \in \mathbb{Z}$, haben wir (bi) bewiesen. ■

Aufgabe 5.3

(a) Sei $H := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die (abelsche) Gruppe von Restklassen modulo 2 unter Addition.

Sei $G := H \times H$ mit Neutralelement $e = ([0], [0])$ und versehen mit der Produktstruktur.

Als Produkt von (abelschen) Gruppen ist G automatisch eine (abelsche) Gruppe. Und offensichtlich hat G genau $|G| = |H \times H| = |H| \cdot |H| = 2 \cdot 2 = 4$ Elemente.

Es bleibt **zu zeigen**, dass $\forall a \in G : a * a = e$.

Sei also $a = ([k], [j]) \in H \times H = G$ ein beliebiges Element. Es gilt

$$\begin{aligned} a * a &= ([k], [j]) * ([k], [j]) \\ &= ([k] + [k], [j] + [j]) \\ &= ([k + k], [j + j]) \\ &= ([2k], [2j]) = ([0], [0]) = e, \end{aligned}$$

da $2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Also ist unsere Konstruktion von G ein passendes Beispiel.

(b) Behauptung. Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe. Angenommen, $\forall a \in G : a * a = e$. Dann ist G kommutativ. ◇

Beweis. Beachte zunächst, dass wegen Eindeutigkeit des Inverses die Annahme zu

$$\forall a \in G : a^{-1} = a \tag{5.1}$$

äquivalent ist.

Zu zeigen: Für alle $a, b \in G$ gilt $a * b = b * a$.

Seien also $a, b \in G$ beliebige Elemente. Es gilt

$$a * b \stackrel{(5.1)}{=} a^{-1} * b^{-1} = (b * a)^{-1} \stackrel{(5.1)}{=} b * a.$$

Also ist G eine kommutative Gruppe. ■

Übungsserie 6

Woche 6

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 6.1

Es sei X eine Menge und $R = \mathcal{P}(X)$. Auf R definiere man die folgenden Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} A + B &= A \cup B \setminus (A \cap B) \\ A \cdot B &= A \cap B \end{aligned}$$

für alle $A, B \in R$.

(a) Die Additions und Multiplikationstabellen für eine 3-elementige Menge, $X = \{a, b, c\}$, sehen wie folgt aus:

+	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
\emptyset	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
$\{c\}$	$\{c\}$	\emptyset	$\{b, c\}$	$\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	\emptyset	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	\emptyset	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\}$	\emptyset	$\{b, c\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	\emptyset	$\{c\}$
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	\emptyset

.	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{c\}$	\emptyset	$\{c\}$	\emptyset	$\{c\}$	\emptyset	$\{c\}$	\emptyset	$\{c\}$
$\{b\}$	\emptyset	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$	\emptyset	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{b, c\}$	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$
$\{a\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\{a, c\}$	\emptyset	$\{c\}$	\emptyset	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$
$\{a, b\}$	\emptyset	\emptyset	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	\emptyset	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$

Der Additionstabelle ist zu entnehmen, dass \emptyset das Nullelement (d. h. additives Neutralelement) ist. Der Multiplikationstabelle ist zu entnehmen, dass $\{a, b, c\}$ das Einselement (d. h. multiplikatives Neutralelement) ist.

(b) Sei nun X eine allgemeine Menge.

Behauptung 6.1 $(R, +, \cdot, \emptyset, X)$ bildet einen kommutativen Ring, wobei $R = \mathcal{P}(X)$. ◇

Es gibt hier zwei Ansätze.

Beweis (von Behauptung 6.1, Ansatz I). Wir gehen einfach alle Axiome durch. Zunächst aber beobachten wir für alle $A, B \in R$ und $x \in X$, dass

$$\begin{aligned} x \in A + B &\stackrel{\text{Defn}}{\iff} x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &\iff x \text{ in } A \text{ oder } B, \text{ aber nicht beides} \\ &\iff x \text{ in exakt einem von } A, B. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Darauf werden wir uns in einigen Berechnungen berufen.

Addition/Assoziativität: Seien $A, B, C \in R$ beliebig. **Zu zeigen:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Da es sich auf beiden Seiten der Gleichung um Mengen handelt, reicht es aus, für alle $x \in X$ zu zeigen, dass $x \in (A + B) + C$ gdw. $x \in A + (B + C)$.

Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in A + (B + C) &\stackrel{(6.1)}{\iff} \text{exakt eines von } x \in A \text{ oder } x \in B + C \text{ gilt} \\ &\stackrel{(6.1)}{\iff} \text{exakt eines von } x \in A \text{ oder (exakt eines von } x \in B \text{ oder } x \in C) \text{ gilt} \\ &\iff \text{exakt eines von } x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in C \text{ gilt} \\ &\iff x \text{ in exakt einem von } A, B, \text{ oder } C \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in (A + B) + C &\stackrel{(6.1)}{\iff} \text{exakt eines von } x \in A + B \text{ oder } x \in C \text{ gilt} \\ &\stackrel{(6.1)}{\iff} \text{exakt eines von (exakt eines von } x \in A \text{ oder } x \in B) \text{ oder } x \in C \text{ gilt} \\ &\iff \text{exakt eines von } x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in C \text{ gilt} \\ &\iff x \text{ in exakt einem von } A, B, \text{ oder } C \end{aligned}$$

Darum gilt $x \in A + (B + C) \iff x \in (A + B) + C$ für alle $x \in X$. Also $A + (B + C) = (A + B) + C$ für alle $A, B, C \in R$. Also ist $(R, +)$ assoziativ.

Addition/Kommutativität: Seien $A, B \in R$ beliebig. **Zu zeigen:** $A + B = B + A$.

Es gilt

$$A + B \stackrel{\text{Defn}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) \stackrel{(*)}{=} (B \cup A) \setminus (B \cap A) \stackrel{\text{Defn}}{=} B + A,$$

wobei die Gleichung bei (*) gilt, weil die Mengenoperationen, \cap und \cup , bekanntermaßen kommutativ sind. Also ist $(R, +)$ kommutativ.

Addition/Nullelement: Wir behaupten, dass $0 := \emptyset$ das additive Neutralelement ist. Sei also $A \in R$ beliebig. **Zu zeigen:** $A + 0 = 0 + A = A$.

Wegen Kommutativität reicht es aus, $A + 0 = A$ zu zeigen. Es gilt

$$A + 0 \stackrel{\text{Defn}}{=} (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$$

Also ist \emptyset ein Neutralelement für $(R, +)$.

Addition/Inverses: Sei $A \in R$ beliebig. **Zu zeigen:** Es gibt ein Element $A' \in R$, so dass $A' + A = A + A' = 0$.

Wir betrachten als Möglichkeit $A' := A$:

$$A' + A = A + A \stackrel{\text{Defn}}{=} (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset.$$

Da wie bereits gezeigt, \emptyset ein Neutralelement in $(R, +)$ ist, haben wir somit bewiesen, dass A sein eigenes additives Inverses ist.

Multiplikation/Assoziativität: Da die Mengenschnittoperation bekanntermaßen assoziativ ist, ist hier eigentlich nichts zu zeigen.

Multiplikation/Kommutativität: Da die Mengenschnittoperation bekanntermaßen kommutativ ist, ist hier eigentlich nichts zu zeigen.

Multiplikation/Einselement: Wir behaupten, dass $1 := X$ das multiplikative Neutralelement ist.

Sei also $A \in R$ beliebig. **Zu zeigen:** $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$.

Wegen Kommutativität reicht es aus, $A \cdot 1 = A$ zu zeigen. Es gilt

$$A \cdot 1 = A \cap X = A,$$

weil $A \in R = \mathcal{P}(X)$ und damit $A \subseteq X$ gilt. Also ist X ein Neutralement für (R, \cdot) .

Links distributivität: Seien $A, B, C \in R$ beliebig. **Zu zeigen:** $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$.

Da es sich auf beiden Seiten der Gleichung um Mengen handelt, reicht es aus, für alle $x \in X$ **zu zeigen**, dass $x \in A \cdot (B + C)$ gdw. $x \in (A \cdot B) + (A \cdot C)$.

Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in A \cdot (B + C) &\stackrel{\text{Defn}}{\iff} x \in A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C)) \\ &\stackrel{(6.1)}{\iff} x \text{ in } A \text{ und } x \text{ in exakt einer der Mengen } B, C \\ &\iff x \text{ in exakt einer der Mengen } A \cap B, A \cap C \\ &\stackrel{(6.1)}{\iff} x \in (A \cdot B) + (A \cdot C). \end{aligned}$$

Also gilt $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$. Also weist $(R, +, \cdot)$ linksdistributivität auf.

Rechts distributivität: Da Multiplikation kommutativ ist, folgt Rechtsdistributivität automatisch aus Linksdistributivität.

Darum erfüllt $(R, +, \cdot)$ die Axiome eines Rings und dieser Ring hat ein Einselement und heißt kommutativ, weil hier Multiplikation kommutativ ist. ■

Beweis (von Behauptung 6.1, Ansatz II). Ein scharfes Auge erkennt, dass wir Teilmengen von X mit binären Tupeln identifizieren kann. Vielmehr wollen wir diese Menge von binären Tupeln mit einer bekannten algebraischen Struktur in Verbindung setzen, also betrachten wir konkret die Abbildungen

$$\begin{aligned}\Phi &: \prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{P}(X) \\ &: \alpha \mapsto \text{supp}(\alpha) := \{x \in X \mid \alpha_x = 1\} \\ \\ \Psi &: \mathcal{P}(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ &: A \mapsto (\mathbf{1}_A(x))_{x \in X}\end{aligned}$$

um Elemente aus dem einen Raum auf Elemente aus dem anderen zu übertragen. Nun ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bekanntermaßen ein kommutativer Ring (eigentlich ein Körper). Darum ist das Produkt $\prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, versehen mit punktweise Addition und punktweise Multiplikation, ebenfalls ein kommutativer Ring.

Darum reicht es aus **zu zeigen**, dass Φ eine Bijektion ist, die die Operationen erhält (auch *Isomorphismus* genannt).

Bijektion: Wir beobachten, dass

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(A)) &= \{x \in X \mid \Psi(A)_x = 1\} \\ &= \{x \in X \mid \mathbf{1}_A(x) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A\} = A\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ und

$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(\alpha)) &= (\mathbf{1}_{\Phi(\alpha)}(x))_{x \in X} \\ &= (\mathbf{1}_{\{x' \in X \mid \alpha_{x'} = 1\}}(x))_{x \in X} \\ &= \left(\begin{array}{l} 1 : x \in \{x' \in X \mid \alpha_{x'} = 1\} \\ 0 : \text{sonst} \end{array} \right)_{x \in X} \\ &= \left(\begin{array}{l} 1 : \alpha_x = 1 \\ 0 : \alpha_x = 0 \end{array} \right)_{x \in X} = (\alpha_x)_{x \in X} = \alpha\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Also $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ und $\Psi \circ \Phi = \text{id}$. Darum sind Φ und Ψ Bijektion (und invertieren einander).

Erhaltung der Operationen: Seien $\alpha, \beta \in \prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. **Zu zeigen:** $\Phi(\alpha + \beta) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta)$ und $\Phi(\alpha \cdot \beta) = \Phi(\alpha) \cdot \Phi(\beta)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha + \beta) &= \{x \in X \mid (\alpha + \beta)_x = 1\} \\ &= \{x \in X \mid \alpha_x + \beta_x = 1\}, \\ &\quad \text{da Operationen auf } \prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ punktweise definiert sind} \\ &= \{x \in X \mid \alpha_x = 1 \text{ od. } \beta_x = 1, \text{ aber nicht beides}\} \\ &= (\{x \in X \mid \alpha_x = 1\} \cup \{x \in X \mid \beta_x = 1\}) \\ &\quad \setminus (\{x \in X \mid \alpha_x = 1\} \cap \{x \in X \mid \beta_x = 1\}) \\ &= (\Phi(\alpha) \cup \Phi(\beta)) \setminus (\Phi(\alpha) \cap \Phi(\beta)) \quad \text{per Konstruktion von } \Phi \\ &= \Phi(\alpha) + \Phi(\beta) \quad \text{per Definition von Addition in } R\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha \cdot \beta) &= \{x \in X \mid (\alpha \cdot \beta)_x = 1\} \\ &= \{x \in X \mid \alpha_x \cdot \beta_x = 1\}, \\ &\quad \text{da Operationen auf } \prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ punktweise definiert sind} \\ &= \{x \in X \mid \alpha_x = 1 \text{ und } \beta_x = 1\} \\ &= \{x \in X \mid \alpha_x = 1\} \cap \{x \in X \mid \beta_x = 1\} \\ &= \Phi(\alpha) \cap \Phi(\beta) \quad \text{per Konstruktion von } \Phi \\ &= \Phi(\alpha) \cdot \Phi(\beta) \quad \text{per Definition von Multiplikation in } R.\end{aligned}$$

Darum präserviert Φ die Operationen.

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ zu dem kommutativen Ring, $(\prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ isomorph ist (und zwar mittels Φ), und damit dass $(R, +, \cdot)$ selbst ein kommutativer Ring ist. ■

Bemerkung. Aus diesem Beweis geht hervor, dass das Nullelement durch $\Phi((0)_{x \in X}) = \emptyset$ und das Einselement durch $\Phi((1)_{x \in X}) = X$ gegeben sind.

Aufgabe 6.2

Wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 mittel der Abbildungen

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{C} &\mapsto \begin{pmatrix} \Re(z) \\ \Im(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 &\mapsto x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

(a) **Behauptung.** Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren eindeutige Werte $r \in (0, \infty)$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$, dann $z = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ (unter der o. s. Identifizierung). \diamond

Beweis. Unter der Identifizierung können wir $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ schreiben, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Da $z \neq 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, muss entweder $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gelten.

Zur **Existenz:** Sei $r := \sqrt{x^2 + y^2}$. Dann $r > 0$ weil $(x, y) \neq (0, 0)$.

Um α zu bestimmen, werden folgende Fälle aufgeführt:

Fall 1. $y = 0$. Dann $x \neq 0$ und in diesem Falle gilt $r = |x|$. Man setze $\alpha := \begin{cases} 0 & : x > 0 \\ \pi & : x < 0 \end{cases}$.

$$\text{Dann } r \cos(\alpha) := \begin{cases} r & : x > 0 \\ -r & : x < 0 \end{cases} = x \text{ und } r \sin(\alpha) = 0.$$

Fall 2. $y > 0$. Man setze $\alpha \in (0, \pi)$ der eindeutige Winkel mit $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$. Dann $r \cos(\alpha) = x$ und $r \sin(\alpha) = r\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{r^2 - (r \cos(\alpha))^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) - x^2} = \sqrt{y^2} = |y| = y$.

Fall 3. $y < 0$. Man setze $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ der eindeutige Winkel mit $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$. Dann $r \cos(\alpha) = x$ und $r \sin(\alpha) = r \cdot -\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = -\sqrt{r^2 - (r \cos(\alpha))^2} = -\sqrt{(x^2 + y^2) - x^2} = -\sqrt{y^2} = -|y| = y$.

Darum gilt in allen Fällen $r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z$.

Zur **Eindeutigkeit:** Seien $r_i \in (0, \infty)$, $\alpha_i \in [0, 2\pi)$ mit $r_i \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} = z$ für $i \in \{1, 2\}$. **Zu zeigen:** $r_1 = r_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. Es gilt

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_1^2(\cos^2(\alpha_1) + \sin^2(\alpha_1)) \\ &= (r_1 \cos(\alpha_1))^2 + (r_1 \sin(\alpha_1))^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= (r_2 \cos(\alpha_2))^2 + (r_2 \sin(\alpha_2))^2 \\ &= r_2^2(\cos^2(\alpha_2) + \sin^2(\alpha_2)) = r_2^2, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, dass $r_1 = r_2$, weil $r_1, r_2 \geq 0$. Da $r_1, r_2 > 0$, folgt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1) &= \frac{r_1 \cos(\alpha_1)}{r_1} = \frac{x}{r_1} = \frac{x}{r_2} = \frac{r_2 \cos(\alpha_2)}{r_2} = \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1) &= \frac{r_1 \sin(\alpha_1)}{r_1} = \frac{y}{r_1} = \frac{y}{r_2} = \frac{r_2 \sin(\alpha_2)}{r_2} = \sin(\alpha_2) \end{aligned}$$

Da $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$ und wegen Injektivität von \cos auf $[0, \pi)$ und $[\pi, 2\pi)$ und der Symmetrie um π , erhalten wir aus $\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha_2)$, dass (i) $\alpha_1 = \alpha_2$ oder (ii) $\alpha_1 = 2\pi - \alpha_2$ gelten muss.

Falls (ii) gilt, so gilt $\sin(\alpha_1) = \sin(2\pi - \alpha_2) = -\sin(\alpha_2)$. Da aber $\sin(\alpha_1) = \sin(\alpha_2)$, folgt daraus $\sin(\alpha_2) = 0$, und damit (iii) $\alpha_2 = 0$ oder (iv) π . Falls (iii) gilt, so gilt wegen (ii) $\alpha_1 = 2\pi - 0 = 2\pi$, was ein Widerspruch ist, weil $\alpha_1 \in [0, 2\pi)$. Darum muss (iv) gelten. Wegen (ii) gilt also $\alpha_1 = 2\pi - \pi = \pi = \alpha_2$. Zusammengefasst gilt entweder (i) $\alpha_1 = \alpha_2$ oder (ii), aus dem sich (iv) ergibt, was wiederum $\alpha_1 = \alpha_2$ zur Folge hat. D. h., in allen Fällen gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.

Darum gelten $r_1 = r_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. Also ist die Darstellung eindeutig. \blacksquare

(b) **Behauptung.** Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Darstellungen $z_i = r_i \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \end{pmatrix}$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann gilt die Rechenregel $z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$. \diamond

Beweis. Multiplikation in \mathbb{C} liefert

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \begin{pmatrix} \Re(z_1) \Re(z_2) - \Im(z_1) \Im(z_2) \\ \Re(z_1) \Im(z_2) + \Re(z_2) \Im(z_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_1 \cos(\alpha_1) \cdot r_2 \cos(\alpha_2) - r_1 \sin(\alpha_1) \cdot r_2 \sin(\alpha_2) \\ r_1 \cos(\alpha_1) \cdot r_2 \sin(\alpha_2) + r_1 \sin(\alpha_1) \cdot r_2 \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} \\ &= r_1 r_2 \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} \\ &= r_1 r_2 \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die letzte Vereinfachung folgt aus der trigonometrischen Additionsregel. \blacksquare

(c) **Behauptung (de Moivre).** Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Darstellungen $z = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. Dann gilt die Potenzregel $z^n = r^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \diamond

Beweis. Wir beweisen dies per Induktion über n .

Induktionsanfang: Die Gleichung gilt offensichtlich für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 1$. Angenommen, $z^{n-1} = r^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos((n-1)\alpha) \\ \sin((n-1)\alpha) \end{pmatrix}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $z^n = r^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) \end{pmatrix}$.

Per rekursive Definition vom Potenzieren gilt zunächst $z^n = z^{n-1} \cdot z$ (Multiplikation innerhalb der Algebra \mathbb{C}). Aufgabe 6-2(b) zur Folge gilt somit

$$\begin{aligned} z^n = z^{n-1} \cdot z &\stackrel{\text{IV}}{=} r^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos((n-1)\alpha) \\ \sin((n-1)\alpha) \end{pmatrix} \cdot r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{(2b)}}{=} r^{n-1} r \cdot \begin{pmatrix} \cos((n-1)\alpha + \alpha) \\ \sin((n-1)\alpha + \alpha) \end{pmatrix} \\ &= r^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Darum gilt die Gleichung für n .

Also gilt die Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. \blacksquare

Bemerkung. Wir können eigentlich zeigen, dass dies für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Für $n = 0$, gilt $z^0 = 1 + i0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r^0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(0\alpha) \\ \sin(0\alpha) \end{pmatrix}$. Für $n = -1$ liefert uns die Rechenregel für Multiplikation innerhalb \mathbb{C} , dass $r^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$ eine hinreichende Konstruktion für ein Inverses von z ist, und darum ist dies wegen Eindeutigkeit des Inverses gleich z^{-1} . Für $n < 0$ allgemein wenden wir schließlich $z^n = (z^{-1})^{|n|} = (r^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix})^{|n|} = (r^{-1})^{|n|} \cdot \begin{pmatrix} \cos(|n| \cdot -\alpha) \\ \sin(|n| \cdot -\alpha) \end{pmatrix} = r^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) \end{pmatrix}$ an. \diamond

Aufgabe 6.3

Es sei K ein Körper und $F := K \times K$ versehen mit den Operationen $+, \cdot : F \times F \rightarrow F$, definiert vermöge

$$\begin{aligned}(a, b) + (a', b') &= (a + a', b + b') \\ (a, b) \cdot (a', b') &= (aa' - bb', ab' + a'b)\end{aligned}$$

für alle $a, b, a', b' \in K$.

Wir werden folgendes klassifizierendes Ergebnis verwenden, um die Aufgaben zu behandeln (und dieses Resultat dann anschließend beweisen).

Satz 6.2 $(F, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $a^2 + b^2 \neq 0$ innerhalb K für alle $(a, b) \in F \setminus \{(0, 0)\}$. \diamond

(a) Behauptung. Sei $K = \mathbf{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann ist $(F, +, \cdot)$ kein Körper. \diamond

Beweis. Da $(a, b) := (1, 1) \in F \setminus \{(0, 0)\}$ und $a^2 + b^2 = 1 + 1 = 0$ innerhalb $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ist Satz 6.2 zufolge F kein Körper. Es scheitert genau das Axiom der Existenz multiplikativer Inverser. (Nichtsdestotrotz bildet F einen kommutativen Ring mit Einselement.) \blacksquare

(b) Behauptung. Sei $K = \mathbf{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dann ist $(F, +, \cdot)$ ein Körper. \diamond

Beweis. Laut Satz 6.2 reicht es aus für alle $(a, b) \in F \setminus \{(0, 0)\}$ zu zeigen, dass $a^2 + b^2 \neq 0$ innerhalb $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sei also $(a, b) \in F \setminus \{(0, 0)\}$ beliebig. Da $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ gibt es folgende Fälle:

Fall 1. $a = 0, b \neq 0$. Dann $b = \pm 1 \pmod{3}$. Also $a^2 + b^2 = 0 + 1 = 1 \neq 0 \pmod{3}$.

Fall 2. $a \neq 0, b = 0$. Dann $a = \pm 1 \pmod{3}$. Also $a^2 + b^2 = 1 + 0 = 1 \neq 0 \pmod{3}$.

Fall 3. $a \neq 0, b \neq 0$. Dann $a, b = \pm 1 \pmod{3}$. Also $a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2 \neq 0 \pmod{3}$.

Also gilt in jedem Falle $a^2 + b^2 \neq 0$. Darum bildet F einen Körper. \blacksquare

Um Satz 6.2 zu beweisen, brauchen wir zunächst folgendes Zwischenresultat.

Lemma 6.3 $(F, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn in der Teilstruktur (F, \cdot) multiplikative Inverse existieren für jedes Element. \diamond

Beweis (von Lemma 6.3). Da die Teilstruktur, $(F, +)$, durch die Produktstruktur $(K, +) \times (K, +)$ gegeben ist, dessen Faktoren all kommutative Gruppen sind, ist $(F, +)$ eine kommutative Gruppe. Das heißt, die **Additionsaxiome** unter den Körperaxiomen sind allesamt erfüllt. (Insbesondere ist das Nullelement durch $0_F = (0, 0)$ gegeben.)

Bei den **Multiplikationsaxiomen** sehen wir dass Kommutativität offensichtlich gilt, weil die o. s. Definitionen von Multiplikation in den Argumenten offensichtlich symmetrisch ist, und weil die Operationen in K kommutativ sind. Es gilt auch $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + 1 \cdot b) = (a, b)$, sodass $1_F := (1, 0)$ das Einselement von F ist. Assoziativität von Multiplikation ist auch erfüllt, weil

$$\begin{aligned}(a, b) \cdot ((a', b') \cdot (a'', b'')) &= (a, b) \cdot (a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b') \\ &= (a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + a''b'), a(a'b'' + a''b') + (a'a'' - b'b'')b) \\ &= (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - ba''b', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - b'b''b) \\ &= \boxed{(aa'a'' - ab'b'' - a'b'b'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'')}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}((a, b) \cdot (a', b')) \cdot (a'', b'') &= (aa' - bb', ab' + a'b) \cdot (a'', b'') \\ &= ((aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + a''(ab' + a'b)) \\ &= (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'b'b'', aa'b'' - bb'b'' + a''ab' + a''a'b) \\ &= \boxed{(aa'a'' - ab'b'' - a'b'b'' - a''bb', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - bb'b'')}\end{aligned}$$

für alle $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in F$. Darum ist (F, \cdot) assoziativ, kommutativ, und hat ein Neutralelement.

Wegen Kommutativität von Multiplikation in F , ist **Distributivität** zu Linksdistributivität äquivalent, und da

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot ((a', b') + (a'', b'')) &= (a, b) \cdot (a' + a'', b' + b'') \\
&= (a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + (a' + a'')b) \\
&= ((aa' - bb') + (aa'' - bb''), (ab' + a'b) + (ab'' + a''b)) \\
&= (aa' - bb', ab' + a'b) + (aa'' - bb'', ab'' + a''b) \\
&= (a, b) \cdot (a', b') + (a, b) \cdot (a'', b'')
\end{aligned}$$

für alle $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in F$, ist dies erfüllt.

Darum erfüllt $(F, +, \cdot)$ jedes Axiom eines Körpers, evtl. bis auf das Axiom für multiplikative Inverse.

Darum gilt: $(F, +, \cdot)$ bildet einen Körper \Leftrightarrow jedes Element in $F \setminus \{0_F\}$ hat ein multiplikatives Inverses.

■ (Lemma 6.3)

Jetzt können wir uns dem Beweis von Satz 6.2 widmen

Beweis (von Satz 6.2). Laut Lemma 6.3 gilt $(F, +, \cdot)$ ein Körper gdw. jedes Element in F hat ein multiplikatives Inverses. Darum reicht es aus **zu zeigen**, dass

$$\forall (a, b) \in F \setminus \{0_F\} : \exists (a', b') \in F : (a, b) \cdot (a', b') = 1_F \iff \forall (a, b) \in F \setminus \{0_F\} : a^2 + b^2 \neq 0$$

gilt.^a

(\Leftarrow). Angenommen, $a^2 + b^2 \neq 0$ für alle $(a, b) \in F \setminus \{0_F\}$.

Sei $(a, b) \in F \setminus \{0_F\}$ beliebig. **Zu zeigen:** (a, b) sei innerhalb F invertierbar.

Per Annahme gilt nun $r := a^2 + b^2 \neq 0$ und somit ist r innerhalb K invertierbar. Setze $(a', b') := (r^{-1}a, -r^{-1}b)$. Dann

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot (a', b') &= (a \cdot r^{-1}a - b(-r^{-1}b), a(-r^{-1}b) + (r^{-1}a)b) \\
&= (r^{-1}(a^2 + b^2), 0) \\
&= (r^{-1}r, 0) \\
&= (1, 0) \\
&= 1_F.
\end{aligned}$$

Also ist jedes $(a, b) \in F \setminus \{0_F\}$ innerhalb F invertierbar.

(\Rightarrow). Angenommen, jedes Element in $F \setminus \{0_F\}$ sei invertierbar.

Wie oben erklärt, ist $(F, +, \cdot)$ somit ein Körper.

Sei $(a, b) \in F \setminus \{0_F\}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a^2 + b^2 \neq 0$.

Da $(a, b) \neq 0_F = (0, 0)$, gilt $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ und damit gilt auch $(a, -b) \in F \setminus \{0_F\}$.

Da F ein Körper ist, sind (a, b) und $(a, -b)$ und folglich auch das Produkt $(a, b) \cdot (a, -b)$ invertierbar.

Da F ein Körper ist, bedeutet dies wiederum, dass $(a, b) \cdot (a, -b) \neq 0_F$ gilt. Nun,

$$(a, b) \cdot (a, -b) = (aa - b(-b), a(-b) + ab) = (a^2 + b^2, 0).$$

Darum gilt $(a^2 + b^2, 0) = (a, b) \cdot (a, -b) \neq 0_F = (0, 0)$, woraus sich $a^2 + b^2 \neq 0$ ergibt.

■ (Satz 6.2)

^aMan beachte: Wegen multiplikativer Kommutativität folgt aus $(a, b) \cdot (a', b') = 1_F$, dass auch $(a', b') \cdot (a, b) = 1_F$ gilt.

Übungsserie 7

Woche 7

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variante anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 7.1

Betrachte den Vektorraum $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ über dem Körper \mathbb{R} . Wir bezeichnen mit $0(\cdot)$ die konstante Funktion, die überall gleich 0 ist. Dies ist zufälligerweise auch das Nullelement von V .

(a) **Behauptung.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $U_1 := \{f \in V \mid f(a) = f(b)\}$ ein Untervektorraum (»linearer Unterraum«). ◇

Beweis. Wir gehen die Axiome aus der Definition durch:

(NL) Offensichtlich gilt $0(\cdot) \in U_1$, da diese Funktion überall und damit insbesondere auf $\{a, b\}$ gleich ist. Also, $U_1 \neq \emptyset$.

(LK) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in U_1$. **Zu zeigen:** $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in U_1$
Es gilt

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(a) &= \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot g(a) \\ &\stackrel{(*)}{=} \alpha \cdot f(b) + \beta \cdot g(b) \\ &= (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(b) \end{aligned}$$

Hier gilt (*), weil $f, g \in U_1$.

Darum gilt per Konstruktion, dass $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in U_1$.

Darum bildet U_1 einen Untervektorraum. ■

(b) **Behauptung.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $U_2 := \{f \in V \mid f(a) = f(b) = 1\}$ kein Untervektorraum. ◇

Beweis. Offensichtlich ist der Nullvektor, $0(\cdot)$, nicht in U_2 , da $0(a) = 0 \neq 1$. Darum kann U_2 kein Untervektorraum sein. (Siehe [Sin20, Lemma 5.1.3].) ■

Alternativ für die \Rightarrow -Richtung kann man folgendermaßen argumentieren: die konstante Funktion $1(\cdot)$ liegt in U_2 , aber $0 \cdot 1(\cdot) \notin U_2$, sodass U_2 nicht unter Skalarmultiplikation stabil ist.

(c) **Behauptung.** Die Teilmenge $U_3 := \{f \in V \mid f \text{ injektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von V . ◇

Beweis. Offensichtlich ist der Nullvektor, $0(\cdot)$, nicht in U_3 , weil diese konstante Funktion nicht injektiv ist. Darum kann U_3 kein Untervektorraum sein. (Siehe [Sin20, Lemma 5.1.3].) ■

(d) **Behauptung.** Die Teilmenge $U_4 := \{f \in V \mid f \text{ surjektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von V . ◇

Beweis. Offensichtlich ist der Nullvektor, $0(\cdot)$, nicht in U_4 , weil die konstante Funktion nicht surjektiv ist. Darum kann U_4 kein Untervektorraum sein. (Siehe [Sin20, Lemma 5.1.3].) ■

Aufgabe 7.2

- (a) **Behauptung.** Sei $K = \mathbb{Q}$. Dann sind $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ über K linear unabhängig. ◇

Beweis. Es reicht aus, den (Zeilen)rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Wir berechnen

Reduktion der Matrix, A , mittels des Gaußverfahrens:

Zeilentransformationen $Z_2 \leftarrow 3 \cdot Z_1 - Z_2$ und $Z_3 \leftarrow 2 \cdot Z_1 - Z_3$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilentransformation $Z_3 \leftarrow 4 \cdot Z_3 - 3 \cdot Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

Der Zeilenstufenform entnimmt man, $\text{Rang}(A) = 3$. Darum sind alle 3 Vektoren, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, linear unabhängig. ■

- (b) **Behauptung.** Sei $K = \mathbb{F}_5$. Dann sind $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ über K nicht linear unabhängig. ◇

Beweis. Es reicht aus, den (Zeilen)rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Um dies zu bestimmen, können wir das Gaußverfahren anwenden. Da wir in \mathbb{F}_5 arbeiten, genügt es, die Matrix über \mathbb{Z} zu behandeln, und lediglich in den Zeilenoperationen Vielfache von 5 zu vermeiden. Da die Matrix dieselbe ist wie in **Aufgabe 7.2(a)** und in dem Gaußverfahren dort Vielfache von 5 vermieden wurden, ist das Resultat

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & 5(=0) \\ 0 & 0 & 5(=0) \end{pmatrix}$$

Der Zeilenstufenform entnimmt man, $\text{Rang}(A) = 2$. Darum sind nur 2 der Vektoren, und zwar $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, linear unabhängig. Der Vektor, \mathbf{v}_3 , hingegen, hängt linear von diesen ab. ■

- (c) **Behauptung.** Sei $K = \mathbb{C}$. Dann sind $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ 1-2i \end{pmatrix}$, und $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 2-i \end{pmatrix}$ über K nicht linear unabhängig. ◇

Beweis. Es reicht aus, den (Zeilen)rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ i & -i & 1-i \\ 0 & 1-2i & 2-i \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Wir berechnen

Reduktion der Matrix, A , mittels des Gaußverfahrens:

Zeilentransformation $Z_2 \leftarrow i \cdot Z_2 + Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 0 & 2+i & 1+2i \\ 0 & 1-2i & 2-i \end{pmatrix}$$

Zeilentransformation $Z_3 \leftarrow i \cdot Z_3 - Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1+i & i \\ 0 & \boxed{2+i} & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Zeilenstufenform entnimmt man, $\text{Rang}(A) = 2$. Darum sind nur 2 der Vektoren, und zwar $\{v_1, v_2\}$, linear unabhängig. Der Vektor, v_3 , hingegen, hängt linear von diesen ab. ■

Wir betrachten nun dieselbe Aufgabe, nur über \mathbb{R} statt \mathbb{C} :

Behauptung. Sei $K = \mathbb{R}$. Dann sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ über K linear unabhängig. ◇

Beweis. Es reicht aus, den (Zeilen)rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Wir berechnen

Reduktion der Matrix, A , mittels des Gaußverfahrens:

Zeilentransformation $Z_4 \leftarrow i \cdot Z_1 - Z_4$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeilentransformation $Z_3 \leftrightarrow Z_6$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilentransformationen $Z_3 \leftarrow 2 \cdot Z_2 + Z_3$, $Z_4 \leftarrow 2 \cdot Z_2 - Z_4$, und $Z_5 \leftarrow -1 \cdot Z_2 + Z_5$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilentransformationen $Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3$, $Z_5 \leftarrow Z_5 - Z_3$, und $Z_6 \leftarrow Z_6 - Z_3$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Zeilenstufenform entnimmt man, $\text{Rang}(A) = 3$. Darum sind alle 3 Vektoren, $\{v_1, v_2, v_3\}$, linear unabhängig. ■

Aufgabe 7.3

Seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{v}_i \in V$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) **Behauptung.** Die folgende Aussage ist gültig:

Angenommen es existieren linear unabhängige Vektoren, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in V$ und Skalare $c_i \in K \setminus \{0\}$, so dass $\mathbf{v}_i = c_i \mathbf{w}_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dann bilden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ein linear unabhängiges System. \diamond

Beweis. Wir zeigen dies direkt. Sei $\alpha_i \in K$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und so dass $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Zu zeigen: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_i = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0} &\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (c_i \mathbf{w}_i) = \mathbf{0} \\ &\iff \sum_{i=1}^n (\alpha_i c_i) \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \\ &\implies \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_i c_i = 0, \\ &\quad \text{da } \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \text{ linear unabhängig} \\ &\iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_i = 0 \text{ oder } c_i = 0, \quad \text{da } K \text{ ein Körper ist} \\ &\iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_i = 0, \quad \text{da } c_i \neq 0 \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

Darum gilt $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Folglich sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig. \blacksquare

(b) **Behauptung.** Die folgende Aussage ist ungültig:

Angenommen, $\mathbf{v}_n \notin \text{Lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. Dann ist $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig. \diamond

Beweis. Folgendes ist ein Gegenbeispiel. Sei $n \geq 3$ beliebig. Sei $V = K^2$ und betrachte die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \dots = \mathbf{v}_{n-1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\mathbf{v}_n \notin \text{Lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$, weil $\text{Lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \text{Lin}(\mathbf{v}_1) = \{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in K \} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Andererseits sind die $n-1 \geq 2$ Vektoren, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ per Wahl nicht linear unabhängig (weil die alle gleich sind). Also sind die Vektoren, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ebenfalls nicht linear unabhängig. Darum gilt die behauptete Implikation nicht im Allgemeinen. \blacksquare

(c) **Behauptung.** Die folgende Aussage ist ungültig:

Das System $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes echte Teilsystem linear unabhängig ist. \diamond

Beweis. Der \Rightarrow -Teil ist offensichtlich wahr. Es kann also nur die \Leftarrow -Richtung schiefgehen. Wir betrachten ein Gegenbeispiel mit $n = 3$ Vektoren. Sei $V = K^2$ und betrachte

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist einfach zu sehen, dass die echten Teilsysteme

$$(\mathbf{v}_1), \quad (\mathbf{v}_2), \quad (\mathbf{v}_3), \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3), \quad (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

linear unabhängig sind. Aber (vor allem weil V nur 2-dimensional ist) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ist nicht linear unabhängig, da

$$1 \cdot \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \mathbf{v}_2 + (-1) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Darum gilt die behauptete Implikation nicht im Allgemeinen. \blacksquare

(d) **Behauptung.** Die folgende Aussage ist gültig:

Angenommen, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sei linear unabhängig. Dann für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1\}$ und $c \in K$ bilden $\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ein linear unabhängiges System, wobei $\mathbf{u} := \mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_i$. \diamond

Beweis. Wir zeigen dies direkt. Sei $\alpha_j \in K$ für $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ und so dass $\alpha_1 \mathbf{u} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.

Zu zeigen: $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_j = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{u} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{0} &\iff \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_1 c \mathbf{v}_i + \sum_{j=2}^n \alpha_j \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \\ &\iff c \alpha_1 \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \\ &\iff \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \\ &\quad \text{wobei } \beta_j = \alpha_j \text{ für } j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} \text{ und } \beta_i = c \alpha_1 + \alpha_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \beta_j = 0, \\
&\quad \text{da } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \text{ linear unabhängig} \\
&\iff c\alpha_1 + \alpha_i = 0 \text{ und } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} : \alpha_j = 0 \\
&\implies c \cdot 0 + \alpha_i = 0 \text{ und } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} : \alpha_j = 0 \\
&\iff \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_j = 0
\end{aligned}$$

Darum gilt $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Folglich sind $\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig. ■

Übungsserie 8

Woche 8

Aufgabe 8.1

In dieser Aufgabe arbeiten wir im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$. Seien

$$\begin{aligned}U_1 &= \{\mathbf{x} \in V \mid x_1 + 2x_4 = x_2 + 2x_3\}, \\U_2 &= \{\mathbf{x} \in V \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}.\end{aligned}$$

Zu bestimmen sind Basen für U_1 , U_2 , $U_1 \cap U_2$, und $U_1 + U_2$. Wir beachten vorab

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in U_1 &\iff x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A_1} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in U_2 &\iff x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A_2} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in U_1 \cap U_2 &\iff \begin{aligned} &x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ &\text{und } x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{aligned} &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A_3} \mathbf{x} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x} \in V$. Folglich ist U_1 die Menge der Nullvektoren von A_1 , U_2 die Menge der Nullvektoren von A_2 , $U_1 \cap U_2$ die Menge der Nullvektoren von A_3 . Um diese zu bestimmen, bringen wir diese Matrizen in Zeilenstufenform, und bestimmen mithilfe von [Sin20, Satz 5.3.8] eine Basis des Lösungsraums.

Zeilenstufenform für A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Darum sind x_2, x_3, x_4 frei und x_1 wird durch diese bestimmt. Der Zeilenstufenform zufolge gilt

$$x_1 = x_2 + 2x_3 - 2x_4.$$

Mithilfe von [Sin20, Satz 5.3.8] erhalten wir eine Basis des Lösungsraums, indem wir jeweils eine freie Unbekannte auf 1 und alle anderen auf 0 setzen:

$$\begin{aligned}x_2 := 1, x_3 := 0, x_4 := 0 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 := 0, x_3 := 1, x_4 := 0 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 := 0, x_3 := 0, x_4 := 1 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Darum gilt

$$U_1 = \{\mathbf{x} \in V \mid A_1 \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Lin} \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{=:B_1}$$

und B_1 bildet eine Basis für U_1 .

Zeilenstufenform für A_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Darum sind x_2, x_3, x_4 frei und x_1 wird durch diese bestimmt. Der Zeilenstufenform zufolge gilt

$$x_1 = x_2 + x_3 + x_4.$$

Mithilfe von [Sin20, Satz 5.3.8] erhalten wir eine Basis des Lösungsraums wie oben:

$$\begin{aligned} x_2 := 1, x_3 := 0, x_4 := 0 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 := 0, x_3 := 1, x_4 := 0 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 := 0, x_3 := 0, x_4 := 1 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Darum gilt

$$U_2 = \{\mathbf{x} \in V \mid A_2 \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Lin} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: B_2} \right\}$$

und B_2 bildet eine Basis für U_2 .

Zeilenstufenform für A_3 (Zeile₂ \leftarrow Zeile₂ - Zeile₁):

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Darum sind x_2, x_4 frei und x_1, x_3 werden durch diese bestimmt. Der Zeilenstufenform zufolge gilt

$$\begin{aligned} x_3 &= 3x_4 \\ x_1 &= x_2 + 2x_3 - 2x_4 = x_2 + 2(3x_4) - 2x_4 = x_2 + 4x_4. \end{aligned}$$

Mithilfe von [Sin20, Satz 5.3.8] erhalten wir eine Basis des Lösungsraums wie oben:

$$\begin{aligned} x_2 := 1, x_4 := 0 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x_2 := 0, x_4 := 1 &\implies \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

gegeben.

Darum gilt

$$U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in V \mid A_3 \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Lin} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: B_3} \right\}$$

und B_3 bildet eine Basis für $U_1 \cap U_2$.

Es bleibt, nur noch eine Basis für $U_1 + U_2$ zu bestimmen.

ANSATZ I.

Mithilfe der oben berechneten Basen für U_1, U_2 , wissen wir

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wir haben nun ein Erzeugendensystem bestimmt. Diese Menge muss auf eine *maximale linear unabhängige Teilmenge* reduziert werden, um eine Basis daraus zu berechnen. Hierfür reicht es aus, die Vektoren in ein homogenes LGS überzuführen, die Matrix auf Zeilenstufenform zu reduzieren, um etwa durch die Spalten

entsprechend den freien Unbekannten zu bestimmen, welche Spalten linear abhängig sind.

Homogenes System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenoperation $Z_2 \leftarrow Z_1 - Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenoperation $Z_3 \leftarrow 2 \cdot Z_3 - Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenoperation $Z_4 \leftarrow Z_3 - 2 \cdot Z_4$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

\implies nur x_5 frei.

Also hängt die 5. Spalte von Spalten 1–4 ab, welche der Zeilenstufenform zufolge linear unabhängig sind. Folglich ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für $U_1 + U_2$.

ANSATZ II.

Mithilfe der Dimensionsformel (siehe [Sin20, Satz 5.4.3 (2)]) wissen wir

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2) &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \\ &= 3 + 3 - 2 = 4 = \dim(V). \end{aligned}$$

Da V endlich dimensional ist, und $\dim(U_1 + U_2) = \dim(V)$ für den linearen Unterraum $U_1 + U_2 \subseteq V$ gilt, gilt $U_1 + U_2 = V = \mathbb{R}^4$ (Siehe [Sin20, Satz 5.4.3 (1)]). Darum können wir bspw. die kanonische Basis für \mathbb{R}^4

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als Basis für $U_1 + U_2$ verwenden.

Bemerkung. In diesem letzten Teil hatten wir Glück. Wenn sich $\dim(U_1 + U_2) < \dim(V)$ herausgestellt hätte, hätten wir Ansatz II nicht anwenden können, und hätten etwas wie Ansatz I anwenden müssen.

Aufgabe 8.2

In dieser Aufgabe arbeiten wir im Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Dies ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}[x]$. Seien

$$\mathbf{v}_i := (x - 1)^i \in V$$

für $i \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Behauptung 8.1 Die Vektoren in $B := \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ bilden eine Basis für V . ◇

Beweis. Zu zeigen: B ist ein Erzeugendensystem und ist eine linear unabhängige Menge.

Erzeugendensystem:

Da $1, x, \dots, x^d$ offensichtlich ein Erzeugendensystem für V ist, reicht es aus **zu zeigen**, dass $x^k \in \text{Lin } B$ für alle $k \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Fixiere also ein beliebiges $k \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Mithilfe der binomischen Formel wissen wir

$$x^k = (x - 1 + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (x - 1)^i \cdot 1^{k-i} = \sum_{i=0}^k c_i \mathbf{v}_i,$$

wobei $c_i = \binom{k}{i} \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Darum gilt offensichtlich $x^k \in \text{Lin } B$ für alle $k \in \{0, 1, \dots, d\}$. Also ist B ein Erzeugendensystem.

Lineare Unabhängigkeit:

Seien $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=0}^d c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \tag{8.1}$$

wobei $\mathbf{0}$ der Nullvektor von V ist, also das 0-Polynom. **Zu zeigen:** $c_0, c_1, \dots, c_d = 0$.

Ansatz I: Angenommen, dies sei nicht der Fall. Sei $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ maximal mit $c_k \neq 0$. Falls $k = 0$, dann

$$\begin{aligned} x^0 &= c_0^{-1} c_0 (x - 1)^0 \\ &= c_0^{-1} \sum_{i=0}^d c_i (x - 1)^i \quad \text{wegen Maximalität von } k \\ &\stackrel{(8.1)}{=} c_0^{-1} \cdot \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. Falls $k > 0$, dann

$$\begin{aligned} x^k &= x^k - c_k^{-1} \cdot \mathbf{0} \\ &\stackrel{(8.1)}{=} x^k - c_k^{-1} \sum_{i=0}^d c_i (x - 1)^i \\ &= x^k - \sum_{i=0}^k c_k^{-1} c_i (x - 1)^i \quad \text{wegen Maximalität von } k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} -c_k^{-1} c_i (x - 1)^i + (x^k - (x - 1)^k). \end{aligned}$$

Mithilfe der binomischen Formel ist es leicht zu sehen, dass der letzte Term ein Polynom vom Grade $< k$ ist. Das heißt, $x^k \in \text{Lin}\{1, x, \dots, x^{k-1}\}$.

Daraus folgt, dass $1, x, \dots, x^{k-1}, x^k$ linear abhängig sind.

Aber dies widerspricht, dass $1, x^1, x^2, \dots$ im (Ober)vektorraum $\mathbb{R}[x]$ linear unabhängig sind (siehe [Sin20, Bsp. 5.2.7]).

Darum gilt die Annahme nicht. Also $c_0, c_1, \dots, c_d = 0$.

Ansatz II: Sei nun $t \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Wert. Wenn man $x = t + 1$ in (8.1) einsetzt, erhält man

$$\sum_{i=0}^d c_i t^i = \sum_{i=0}^d c_i \mathbf{v}_i(t + 1) = \mathbf{0}(t + 1) = 0. \tag{8.2}$$

Da (8.2) nun für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, haben wir somit bewiesen, dass

$$\sum_{i=0}^d c_i x^i = \mathbf{0} \tag{8.3}$$

gilt. Da nun $1, x^1, x^2, \dots$ im (Ober)vektorraum $\mathbb{R}[x]$ linear unabhängig sind (siehe [Sin20, Bsp. 5.2.7]), folgt aus (8.3) per Definition von linearer Unabhängigkeit, dass $c_0, c_1, \dots, c_d = 0$ gilt. ■

Aufgabe 8.3

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{C} mit Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Bezeichne mit W denselben Vektorraum, nur über dem Körper \mathbb{R} statt \mathbb{C} .

(a)

Behauptung 8.2 Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ bleiben linear unabhängig in W . ◇

Beweis. Seien $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (8.4)$$

Zu zeigen: $c_1, c_2, \dots, c_n = 0$.

Da per Voraussetzung von Aufgabe 3 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig in V sind, gilt nun

$$\forall c'_1, c'_2, \dots, c'_n \in \mathbb{C} : \sum_{i=1}^n c'_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow c'_1, c'_2, \dots, c'_n = 0. \quad (8.5)$$

Da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ folgt unmittelbar aus (8.4) und (8.5), dass $c_1, c_2, \dots, c_n = 0$ gilt. ■

(b) Wir beantworten (b) zusammen mit (c).

(c)

Behauptung 8.3 Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+2}, \dots, \mathbf{v}_{2n}$, wobei

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathbf{v}_{n+i} := i \cdot \mathbf{v}_i \text{ (berechnet in } V \text{),}$$

bilden eine Basis für W . Insbesondere gilt $\dim(W) = 2n = 2 \dim(V)$. ◇

Beweis. Zu zeigen: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n}$ ist ein Erzeugendensystem für W und linear unabhängig.

Erzeugendensystem:

Sei $\xi \in W (= V)$ ein beliebiger Vektor. **Zu zeigen:** Es gibt $c_1, c_2, \dots, c_{2n} \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i = \xi$.

Da nun $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ eine Basis für V ist, und V ein \mathbb{C} -Vektorraum ist, existieren Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \xi. \quad (8.6)$$

Setze nun

$$c_i := \Re(\alpha_i), \quad c_{n+i} := \Im(\alpha_i)$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=n+1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n c_{n+i} \mathbf{v}_{n+i} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n c_{n+i} (i \cdot \mathbf{v}_i) \quad (\text{per Konstruktion}) \\ &= \sum_{i=1}^n (c_i + i \cdot c_{n+i}) \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\Re(\alpha_i) + i \Im(\alpha_i)) \mathbf{v}_i \quad (\text{per Konstruktion}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \stackrel{(8.6)}{=} \xi. \end{aligned}$$

Also gibt es $c_1, c_2, \dots, c_{2n} \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i = \xi$. Da dies für alle $\xi \in W$ gilt, bilden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n}$ ein Erzeugendensystem für W .

Lineare Unabhängigkeit:

Seien $c_1, c_2, \dots, c_{2n} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \quad (8.7)$$

Zu zeigen: $c_1, c_2, \dots, c_{2n} = 0$. Es gilt

$$\mathbf{0} \stackrel{(8.7)}{=} \sum_{i=1}^{2n} c_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \overbrace{(c_i + i \cdot c_{n+i})}^{=: \alpha_i, \in \mathbb{C}} \mathbf{v}_i, \quad (8.8)$$

wobei die letzte Umformung genau wie in der o. s. Berechnung sich herleiten lässt. Da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ im \mathbb{C} -Vektorraum, V , linear unabhängig sind, folgt aus (8.8), dass $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$.

Da $c_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, folgt aus der Definition von jedem α_i , dass

$$\begin{aligned} c_i &= \Re(\alpha_i) = 0 \\ c_{n+i} &= \Im(\alpha_i) = 0 \end{aligned}$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Darum gilt $c_1, c_2, \dots, c_{2n} = 0$. Also sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n}$ linear unabhängig. ■

Bemerkung. Zum Schluss betrachten wir den konkreten Fall von $V = \mathbb{C}^2$ mit der kanonischen Basis

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Behauptung 8.3 zufolge ist

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 := i \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 := i \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

eine Basis für $W := \mathbb{C}^2$, wenn dies als \mathbb{R} -Vektorraum betrachtet wird. Insbesondere gilt $\dim(W) = 4$.

Übungsserie 9

Woche 9

Aufgabe 9.1

Seien

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektoren in \mathbb{R}^4 und setze

$$U := \text{Lin}\{u_1, u_2\} \quad V := \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

Behauptung 9.1 $U \subseteq V$.

Beweis. Es reicht aus zu zeigen, dass $u_1, u_2 \in \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$. Zu diesem Zwecke reicht es aus das homogene LGS $Ax = \mathbf{0}$ in Zeilenstufenform zu bringen, wobei

$$A = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und zu zeigen, dass x_4, x_5 darin freie Unbekannte sind.

Zeilenoperationen $Z_2 \leftarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1$; $Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1$ und $Z_4 \leftarrow Z_4 + 2 \cdot Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_3 \leftarrow Z_3 + \frac{1}{5} \cdot Z_2$ und $Z_4 \leftarrow Z_4 + \frac{4}{5} \cdot Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_3 \leftrightarrow Z_4$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darum sind x_4, x_5 im homogenen LGS frei. Folglich gelten $u_1, u_2 \in \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\} = V$ und damit gilt $U = \text{Lin}\{u_1, u_2\} \subseteq V$. ■

Bemerkung 9.2 Im Beweis von Behauptung 9.1 wurde aus der Feststellung, dass x_4, x_5 im LGS $Ax = \mathbf{0}$ frei sind, schlussfolgert, dass $u_1, u_2 \in \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$. Diese Schlussfolgerung lässt sich rechtfertigen:

- Sei $u \in U = \text{Lin}\{u_1, u_2\}$. Dann existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$.

- Setze nun im homogenen LGS $x_4 := -c_1$ und $x_5 := -c_2$ und bestimme $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, gemäß der Zeilenstufenform. Dies liefert uns eine Lösung zu $Ax = \mathbf{0}$. Wegen der Konstruktion von A heißt dies

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4u_1 + x_5u_2 = \mathbf{0} \quad (9.1)$$

- Folglich gilt

$$\begin{aligned} u &= c_1u_1 + c_2u_2 \\ &= -x_4u_1 + -x_5u_2 \quad (\text{per Konstruktion}) \\ &\stackrel{(9.1)}{=} x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \in \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\} = V. \end{aligned}$$

Da $u \in U$ beliebig gewählt wurde, gilt $U \subseteq V$.

Beachte hier, dass die Freiheit von x_4, x_5 im LGS eine kritische Rolle spielt. \diamond

Behauptung 9.3 $\{v_2 + U\}$ ist eine Basis für V/U . Insbesondere gilt $\dim(V/U) = 1$. \diamond

Beweis. Unser Ziel ist es, zu bestimmen, in wiefern sich das^a System $\{u_1, u_2\}$ durch die Vektoren v_1, v_2, v_3 erweitern lässt, und dabei die linear abhängigen Vektoren zu entfernen und die linear unabhängigen zu behalten (vgl. Ansatz im Beweis von [Sin20, Satz 5.5.3]). Zu diesem Zwecke untersuchen wir das homogene LGS, $Bx = \mathbf{0}$, wobei

$$B = (u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es reicht aus hier **zu zeigen**, dass x_3, x_5 frei sind und x_4 nicht frei ist.

Zeilenoperationen $Z_2 \leftarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1$; $Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1$ und $Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_2 \leftrightarrow Z_4$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_4 \leftarrow Z_4 + 5 \cdot Z_3$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darum sind x_3, x_5 frei und x_1, x_2, x_4 nicht. Also ist $\{v_2 + U\}$ eine (einelementige) Basis für V/U . \blacksquare

Bemerkung. Wie in Bemerkung 9.2 erklärt wurde, sind die Spalten/Vektoren entsprechend den freien Variablen, also v_1, v_3 , linear abhängig von den Spalten/Vektoren entsprechend den nicht-freien Variablen, also u_1, u_2, u_3 . Folglich gelten

$$v_1 + U, v_2 + U \in \text{Lin}\{v_3 + U\}$$

Und da x_4 nicht frei ist, hängt v_3 von u_1, u_2 nicht ab. Also gilt $v_3 + U \neq \mathbf{0}_{V/U}$. \diamond

^a evtl. nicht linear unabhängiges

Aufgabe 9.2

Seien

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vektoren in \mathbb{R}^4 und sei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die eindeutig definierte lineare Abbildung mit $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, wobei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ die kanonische Basis für \mathbb{R}^3 ist.

(a) Wegen Linearität gilt für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) &= \varphi(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \\ &= x_1 \varphi(\mathbf{e}_1) + x_2 \varphi(\mathbf{e}_2) + x_3 \varphi(\mathbf{e}_3) \\ &= x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x} \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 6 \\ 3 & 7 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt $\varphi = \varphi_{\mathbf{A}}$. Im nächsten Aufgabenteil nutzen wir diese Darstellung aus.

(b) Um zu bestimmen, ob $\varphi = \varphi_{\mathbf{A}}$ injektiv, surjektiv, bijektiv ist, berechnen wir die Zeilenstufenform von \mathbf{A} . Es gilt

Zeilenoperationen $Z_2 \leftarrow Z_2 + 2 \cdot Z_1$; $Z_2 \leftarrow Z_2 - 3 \cdot Z_1$ und $Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2$ und $Z_4 \leftarrow Z_4 - 2 \cdot Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_4 \leftarrow Z_4 - 5 \cdot Z_3$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Zeilenrang}(\mathbf{A}) = 3$ (siehe [Sin20, Satz 6.3.11]).

Also gilt $\varphi = \varphi_{\mathbf{A}}$, wobei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix ist, wobei $m = 4$, $n = 3$, und $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3$. Laut [Sin20, Korollar 6.3.15] erhalten wir also

- φ ist **injektiv**, weil $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3 \geq 3 = n$.
- φ ist **nicht surjektiv**, weil $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3 \not\geq 4 = m$.
- φ ist **nicht bijektiv**, weil $m \neq n$.

Aufgabe 9.3

Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K . Seien $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen.

Behauptung. $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ ist injektiv $\Leftrightarrow \varphi$ injektiv und $\text{Kern}(\psi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0\}$. ◇

Beweis. (\implies). Angenommen, $\psi \circ \varphi$ sei injektiv. **Zu zeigen:** (i) φ injektiv und (ii) $\text{Kern}(\psi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

(i) Seien $x, x' \in U$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(x') &\implies \psi(\varphi(x)) = \psi(\varphi(x')) \\ &\implies (\psi \circ \varphi)(x) = (\psi \circ \varphi)(x') \\ &\stackrel{\psi \circ \varphi \text{ inj.}}{\implies} x = x'. \end{aligned}$$

Folglich ist φ injektiv.

(ii) Sei $y \in V$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in \text{Kern}(\psi) \cap \text{Bild}(\varphi) &\iff y \in \text{Bild}(\varphi) \text{ und } y \in \text{Kern}(\psi) \\ &\iff (\exists x \in U : y = \varphi(x)) \text{ und } y \in \text{Kern}(\psi) \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } y \in \text{Kern}(\psi)) \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } \psi(y) = 0) \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } \psi(\varphi(x)) = 0) \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } (\psi \circ \varphi)(x) = 0) \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } x \in \text{Kern}(\psi \circ \varphi)) \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } x \in \{0\}) \\ &\quad \text{(wegen Injektivität von } \psi \circ \varphi \text{ + [Sin20, Lemma 6.1.4(1)])} \\ &\iff \exists x \in U : (y = \varphi(x) \text{ und } x = 0) \\ &\iff y = \varphi(0) = 0 \iff y \in \{0\}. \end{aligned}$$

Darum gilt $\text{Kern}(\psi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

(\impliedby). Angenommen, (i) φ sei injektiv und (ii) $\text{Kern}(\psi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0\}$. **Zu zeigen:** $\psi \circ \varphi$ injektiv. Hierfür wenden wir [Sin20, Lemma 6.1.4(1)] an. Sei $x \in U$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \text{Kern}(\psi \circ \varphi) &\iff \psi(\varphi(x)) = (\psi \circ \varphi)(x) = 0 \\ &\iff \varphi(x) \in \text{Kern}(\psi) \\ &\iff \varphi(x) \in \text{Kern}(\psi) \cap \text{Bild}(\varphi) \quad (\varphi(x) \text{ ist immer in } \text{Bild}(\varphi)) \\ &\stackrel{(ii)}{\iff} \varphi(x) \in \{0\} \\ &\iff \varphi(x) = 0 \\ &\iff x \in \text{Kern}(\varphi) \\ &\iff x \in \{0\} \quad \text{(wegen (i) + [Sin20, Lemma 6.1.4(1)])} \end{aligned}$$

Darum gilt $\text{Kern}(\psi \circ \varphi) = \{0\}$ und laut [Sin20, Lemma 6.1.4(1)] ist dies zur Injektivität von $\psi \circ \varphi$ äquivalent. ■

Übungsserie 10

Woche 10

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 10.1

Seien V, W, X Vektorräume über einem Körper K und seien $\varphi : V \rightarrow W$ und $\psi : W \rightarrow X$ linear. Des Weiteren sei angenommen, V, W, X seien endlich dimensional.

(a)

Behauptung. $\text{Rang}(\psi \circ \varphi) \leq \min\{\text{Rang}(\psi), \text{Rang}(\varphi)\}$. ◇

Beweis. Sei $d = \text{Rang}(\psi \circ \varphi) = \dim(\text{Bild}(\psi \circ \varphi))$. **Zu zeigen:** $d \leq \text{Rang}(\psi) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\psi))$ und $d \leq \text{Rang}(\varphi) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi))$. Da $d = \dim(\text{Bild}(\psi \circ \varphi))$, existiert eine Basis

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \subseteq \text{Bild}(\psi \circ \varphi)$$

für $\text{Bild}(\psi \circ \varphi)$. Insbesondere sind x_1, x_2, \dots, x_d linear unabhängig. Da jedes $x_i \in \text{Bild}(\psi \circ \varphi)$, existieren $v_i \in V$, so dass $(\psi \circ \varphi)(v_i) = x_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Setze außerdem $w_i := \varphi(v_i)$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Darum $x_i = (\psi \circ \varphi)(v_i) = \psi(\varphi(v_i)) = \psi(w_i)$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Da $x_i = \psi(w_i) \in \text{Bild}(\psi)$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, folgt aus der linearen Unabhängigkeit von (x_1, x_2, \dots, x_d) , dass $d \leq \dim(\text{Bild}(\psi))$ (siehe [Sin20, Satz 5.3.4]).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $d \leq \text{Rang}(\varphi)$ gilt. Da $w_i \in \text{Bild}(\varphi)$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, reicht es aus wie oben zu zeigen, dass (w_1, w_2, \dots, w_d) linear unabhängig sind. Für $c_1, c_2, \dots, c_d \in K$ gelten nun folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d c_i w_i = \mathbf{0} &\implies \psi\left(\sum_{i=1}^d c_i w_i\right) = \psi(\mathbf{0}) \\ &\implies \sum_{i=1}^d c_i \psi(w_i) = \mathbf{0} \\ &\text{wegen Linearität von } \psi \text{ und [Sin20, Lemma 6.1.2]} \\ &\implies \sum_{i=1}^d c_i x_i = \mathbf{0} \\ &\text{per Konstruktion von } w_i \\ &\implies c_1, c_2, \dots, c_d = 0_K \\ &\text{weil } (x_1, x_2, \dots, x_d) \text{ linear unabhängig ist.} \end{aligned}$$

Damit gilt $\sum_{i=1}^d c_i w_i = \mathbf{0} \implies c_1, c_2, \dots, c_d = 0_K$ für alle $c_1, c_2, \dots, c_d \in K$. Also ist (w_1, w_2, \dots, w_d) linear unabhängig. Da $w_i \in \text{Bild}(\varphi)$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, erschließt sich aus der linearen Unabhängigkeit $d \leq \dim(\text{Bild}(\varphi))$ (siehe [Sin20, Satz 5.3.4]). ■

(b)

Behauptung. Falls ψ injektiv ist, so gilt $\text{Rang}(\psi \circ \varphi) = \text{Rang}(\varphi)$. ◇

Beweis. Laut Teil (a) wissen wir bereits, dass $\text{Rang}(\psi \circ \varphi) \leq \text{Rang}(\varphi)$. Es bleibt **zu zeigen**, dass

$\text{Rang}(\psi \circ \varphi) \geq \text{Rang}(\varphi)$. Sei $d := \text{Rang}(\varphi) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi))$. Dann existiert eine Basis

$$(w_1, w_2, \dots, w_d) \subseteq \text{Bild}(\varphi)$$

für $\text{Bild}(\varphi)$. Da jedes $w_i \in \text{Bild}(\varphi)$, existieren $v_i \in V$, so dass $\varphi(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Setze außerdem $x_i := \psi(w_i) = \psi(\varphi(v_i)) = (\psi \circ \varphi)(v_i) \in \text{Bild}(\psi \circ \varphi)$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Wir zeigen nun, dass (x_1, x_2, \dots, x_d) linear unabhängig ist. Für $c_1, c_2, \dots, c_d \in K$ gelten nun folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d c_i x_i = \mathbf{0} &\implies \sum_{i=1}^d c_i \psi(w_i) = \mathbf{0} \\ &\text{per Konstruktion von } x_i \\ &\implies \psi\left(\sum_{i=1}^d c_i w_i\right) = \mathbf{0} \\ &\text{wegen Linearität von } \psi \\ &\implies \sum_{i=1}^d c_i w_i \in \text{Kern}(\psi) \\ &\implies \sum_{i=1}^d c_i w_i = \mathbf{0} \\ &\text{wegen Injektivität von } \psi + [\text{Sin20, Lemma 6.1.4}] \\ &\implies c_1, c_2, \dots, c_d = 0_K \\ &\text{weil } (w_1, w_2, \dots, w_d) \text{ linear unabhängig ist.} \end{aligned}$$

Damit gilt $\sum_{i=1}^d c_i x_i = \mathbf{0} \implies c_1, c_2, \dots, c_d = 0_K$ für alle $c_1, c_2, \dots, c_d \in K$. Also ist (x_1, x_2, \dots, x_d) linear unabhängig.

Da (x_1, x_2, \dots, x_d) linear unabhängig ist und $x_i \in \text{Bild}(\psi \circ \varphi)$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, folgt

$$d \leq \dim(\text{Bild}(\psi \circ \varphi)) \stackrel{\text{Defn}}{=} \text{Rang}(\psi \circ \varphi) \quad (\text{siehe } [\text{Sin20, Satz 5.3.4}]). \quad \blacksquare$$

(c)

Behauptung. Falls φ surjektiv ist, so gilt $\text{Rang}(\psi \circ \varphi) = \text{Rang}(\psi)$. ◇

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Rang}(\psi \circ \varphi) &\stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\psi \circ \varphi)) \\ &= \dim((\psi \circ \varphi)(V)) \\ &= \dim(\psi(\varphi(V))) \\ &= \dim(\psi(\text{Bild}(\varphi))) \\ &= \dim(\psi(W)), \quad \text{da } \varphi \text{ surjektiv ist} \\ &= \dim(\text{Bild}(\psi)) \\ &\stackrel{\text{Defn}}{=} \text{Rang}(\psi). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Aufgabe 10.2

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zuerst beachten wir dass $\mathcal{A} := (v_1, v_2)$ und $\mathcal{B} := (w_1, w_2, w_3)$ Basen für \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 :

Setze $A := (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := (w_1 \ w_2 \ w_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Anwendung des Gaußverfahrens liefert

$$A \xrightarrow{Z_2 \leftarrow 2 \cdot Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 \\ 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Darum gilt $\text{Rang}(A) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ und $\text{Rang}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, woraus sich ergibt, dass \mathcal{A} eine Basis für \mathbb{R}^2 und \mathcal{B} eine Basis für \mathbb{R}^3 sind (vgl. [Sin20, Korollar 5.4.4]).

(a) Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei $\varphi(x) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:C} x.$$

Also gilt $\varphi = \varphi_C$. Folglich gilt $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = A^{-1}CA$. Um dies zu berechnen betrachten wir das augmentierte System $(A|CA)$ und führen darauf das Gaußverfahren, bis die linke Hälfte wie die Identitätsmatrix aussieht. Dann steht in der rechten Hälfte die Matrix $A^{-1}CA$. Es gilt

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Und das augmentierte System, $(A|CA)$, wird wie folgt reduziert:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 4 & -2 \\ 1 & 1 & | & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \leftarrow 2 \cdot Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 4 & -2 \\ 0 & 3 & | & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 \leftarrow 3 \cdot Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 6 & 0 & | & 6 & -6 \\ 0 & 3 & | & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 : 6 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 : 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darum gilt $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = A^{-1}CA = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$.

Zur Untersuchung der Injektivität/Surjektivität von φ , da φ isomorph zu φ_C ist, reicht es aus, [Sin20, Korollar 6.3.15] anzuwenden. Man sieht direkt, dass $\text{Rang}(C) = 2$. Da $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m = 2$ und $n = 2$, und da $\text{Rang}(C) = 2 = m = n$, ist φ bijektiv.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 5x_2 - x_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}_{=:C} x.$$

Also gilt $\varphi = \varphi_C$. Folglich gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = B^{-1}CB$. Um dies zu berechnen betrachten wir das augmentierte System $(B|CB)$ und führen darauf das Gaußverfahren, bis die linke Hälfte wie die Identitätsmatrix aussieht. Dann steht in der rechten Hälfte die Matrix $B^{-1}CB$. Es gilt

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Und das augmentierte System, $(B|CA)$, wird wie folgt reduziert:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -6 \end{array} \right) & \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_1 - Z_2} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -6 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow 2 \cdot Z_1 - Z_2 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2}} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow 2 \cdot Z_1 - 3 \cdot Z_3 \\ Z_2 \leftarrow 2 \cdot Z_1 + 3 \cdot Z_3}} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 : 4 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 : 4 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 : 2}} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Darum gilt $M_B^A(\varphi) = B^{-1}CA = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Zur Untersuchung der Injektivität/Surjektivität von φ , da φ isomorph zu φ_M mit $M = M_B^A(\varphi)$ ist, reicht es aus, [Sin20, Korollar 6.3.15] anzuwenden. Man sieht direkt, dass $\text{Rang}(M) = 2$. Da $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m = 3$ und $n = 2$, und da $\text{Rang}(M) = 2 = n < m$, ist φ injektiv aber nicht surjektiv.

(c) Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $\varphi(x) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:C} x.$$

Also gilt $\varphi = \varphi_C$. Folglich gilt $M_A^B(\varphi) = A^{-1}CB$. Um dies zu berechnen betrachten wir das augmentierte System $(A|CB)$ und führen darauf das Gaußverfahren, bis die linke Hälfte wie die Identitätsmatrix aussieht. Dann steht in der rechten Hälfte die Matrix $A^{-1}CB$. Es gilt

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Und das augmentierte System, $(A|CB)$, wird wie folgt reduziert:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 2 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{Z_2 \leftarrow 2 \cdot Z_2 - Z_1} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & -4 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{Z_1 \leftarrow 3 \cdot Z_1 + Z_2} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 6 & 0 & 10 & -2 & 14 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & -4 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 : 6 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 : 3}} & \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 5/3 & -1/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 4/3 & -4/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Darum gilt $M_A^B(\varphi) = A^{-1}CB = \boxed{\begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 & 7/3 \\ 4/3 & 4/3 & -4/3 \end{pmatrix}}$.

Zur Untersuchung der Injektivität/Surjektivität von φ , da φ isomorph zu φ_C ist, reicht es aus, [Sin20, Korollar 6.3.15] anzuwenden. Man kann leicht erkennen (etwa durch einen Zeilentausch), dass $\text{Rang}(C) = 2$. Da $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m = 2$ und $n = 3$, und da $\text{Rang}(C) = 2 = m < n$, ist φ surjektiv aber nicht injektiv.

Aufgabe 10.3

Seien $d \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Betrachtet sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ definiert durch

$$\varphi(f)(t) := f(t+a), \quad \text{für alle } f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}, t \in \mathbb{R}.$$

Bevor wir die uns den Aufgaben widmen, machen wir von der binomischen Formel mehrfach Gebrauch und beobachten wir für $f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ der Form $f = \sum_{k=0}^d \alpha_k x^k$ mit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \varphi(f)(t) &= f(t+a) \\ &= \sum_{k=0}^d \alpha_k (t+a)^k \\ &= \sum_{k=0}^d \alpha_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} t^i \quad (\text{Anwendung der bin. Formel}) \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{i=0}^k \alpha_k \binom{k}{i} a^{k-i} t^i \\ &= \sum_{i=0}^d \underbrace{\left(\sum_{k=i}^d \binom{k}{i} a^{k-i} \alpha_k \right)}_{=: \alpha'_i} t^i. \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Folglich gilt

$$\varphi(f) = \sum_{i=0}^d \alpha'_i x^i. \quad (10.1)$$

Insbesondere ist es zumindest klar, dass $\varphi(f) \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ für alle $f \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ gilt. D. h. φ ist wohldefiniert.

(a) Behauptung. φ ist linear. ◇

Beweis (Ansatz I). Wir beweisen die Aussage direkt. Für diesen Beweis ist es wichtig, dass wir die Objekte des Vektorraumes, $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ wirklich als Funktionen und nicht als abstrakte Objekt betrachten.

Es reicht aus zu zeigen, dass φ dem (LIN)-Axiom genügt (siehe [Sin20, §6.1]). Seien also $c, c' \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ beliebig. **Zu zeigen:** $\varphi(cf + c'g) = c\varphi(f) + c'\varphi(g)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} (\varphi(cf + c'g))(x) &\stackrel{\text{Defn}}{=} (cf + c'g)(x+a) \\ &\stackrel{(*)}{=} (cf)(x+a) + (c'g)(x+a) \\ &\stackrel{(*)}{=} c \cdot (f(x+a)) + c' \cdot (g(x+a)) \\ &\stackrel{\text{Defn}}{=} c \cdot (\varphi(f)(x)) + c' \cdot (\varphi(g)(x)) \\ &\stackrel{(*)}{=} (c \cdot \varphi(f))(x) + (c' \cdot \varphi(g))(x) \\ &\stackrel{(*)}{=} (c \cdot \varphi(f) + c' \cdot \varphi(g))(x) \end{aligned} \quad (10.2)$$

Hier gelten die mit (*) gekennzeichneten Gleichungen, per Definition von (punktweise) Skalarmultiplikation und Vektoraddition innerhalb des Vektorraumes, der aus \mathbb{R} -wertigen Funktionen besteht.

Da nun (10.2) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, haben wir bewiesen, dass $\varphi(cf + c'g) = c\varphi(f) + c'\varphi(g)$ für alle $c, c' \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$. Darum gilt das (LIN)-Axiom. Somit ist φ linear. ■

Beweis (Ansatz II). In diesem Ansatz machen wir von Darstellungsmatrizen Gebrauch. Da nun $\mathcal{B} = \{x^0, x^1, \dots, x^d\}$ eine Basis von $V := \mathbb{R}[x]_{\leq d}$ ist und φ eine wohldefinierte Funktion von V nach V ist, können wir o. E. φ als Abbildung von \mathbb{R}^{d+1} nach \mathbb{R}^{d+1} betrachten. Bezeichnen wir diese Abbildung als $\tilde{\varphi}$. Da \mathbb{R}^{d+1} zu V isomorph ist, reicht es aus, um die Linearität von φ zu beweisen, zu zeigen, dass eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ existiert, so dass $\tilde{\varphi}$ gleich φ_C ist, was auf jeden Fall linear ist (siehe [Sin20, §6.2]). Zu diesem Zwecke konstruieren wir die Matrix, $C \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$, mit Einträgen

$$C_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i} a^{j-i} & : j \geq i \\ 0 & : j < i \end{cases}$$

für $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$, unter Betrachtung des entsprechenden Objekts $f = \sum_{i=0}^d \alpha_i x^i \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$, und da laut (10.1) $\varphi(f) = \sum_{i=0}^d \alpha'_i x^i$ mit $\alpha'_i = \sum_{j=i}^d \binom{j}{i} a^{j-i} \alpha_j$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, erhalten wir

$$\tilde{\varphi}(\alpha) = \alpha' = \left(\sum_{j=i}^d \binom{j}{i} a^{j-i} \alpha_j \right)_{i=0}^{d+1}.$$

Beachte nun, dass

$$\sum_{j=i}^d \binom{j}{i} a^{j-i} \alpha_j = \sum_{j=i}^d C_{ij} \alpha_j = \sum_{j=0}^d C_{ij} \alpha_j = \text{das } i\text{-te Element von } C \cdot \alpha$$

für alle $i \in \{0, 1, \dots, d+1\}$, da $C_{ij} = 0$ für $0 \leq j < i$. Darum gilt $\tilde{\varphi}(\alpha) = C \cdot \alpha = \varphi_C(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$. Also, $\tilde{\varphi} = \varphi_C$. Darum ist φ wie oben erklärt linear. ■

- (b) Laut Teil (a) ist φ linear, und somit hat φ eine (eindeutige) Matrizendarstellung $M_B^B(\varphi) \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$. Wir haben dies im 2. Ansatz im Allgemeinen explizit ausgerechnet (siehe die Konstruktion von C in diesem Beweis). Für $d = 4$ ist dies nun

$$M_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} a^0 & \binom{1}{0} a^1 & \binom{2}{0} a^2 & \binom{3}{0} a^3 & \binom{4}{0} a^4 \\ 0 & \binom{1}{1} a^0 & \binom{2}{1} a^1 & \binom{3}{1} a^2 & \binom{4}{1} a^3 \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} a^0 & \binom{3}{2} a^1 & \binom{4}{2} a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} a^0 & \binom{4}{3} a^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{4} a^0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3a & 6a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als **Alternative** können wir (davon ausgehend, dass φ linear ist) einfach die Abbildung auf die Basiselemente anwenden, diese wiederum in Bezug auf die Basis umschreiben und daraus die Darstellungsmatrix ablesen:

$$\begin{aligned} \varphi(x^0) &= (x+a)^0 = 1 \cdot x^0 && \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(x^1) &= (x+a)^1 = a \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 && \cong \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(x^2) &= (x+a)^2 = a^2 \cdot x^0 + 2a \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 && \cong \begin{pmatrix} a^2 \\ 2a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(x^3) &= (x+a)^3 = a^3 \cdot x^0 + 3a^2 \cdot x^1 + 3a \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 && \cong \begin{pmatrix} a^3 \\ 3a^2 \\ 3a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(x^4) &= (x+a)^4 = a^4 \cdot x^0 + 4a^3 \cdot x^1 + 6a^2 \cdot x^2 + 4a \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 && \cong \begin{pmatrix} a^4 \\ 4a^3 \\ 6a^2 \\ 4a \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir diese Spalten in eine Matrix aufführen, ergibt sich genau die o. s. Matrizendarstellung von φ .

Bemerkung. Als kleine Bestätigung, dass dies »nicht offensichtlich falsch« sei, beachte, dass sich diese Matrix der Identitätsmatrix (\cong Identitätsabbildung) nähert als $a \rightarrow 0$ in \mathbb{R} , was zu erwarten ist.

Übungsserie 11

Woche 11

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variante anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 11.1

- (a) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 11 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$, eine $m \times n$ -Matrix über dem Körper \mathbb{Q} , mit $m = n = 4$. Um zu bestimmen, ob A invertierbar ist, bestimmen wir die Zeilenstufenform. Dabei augmentieren wir A mit der 4×4 -Identitätsmatrix, um im Falle der Invertierbarkeit das Inverse von A mit zu rechnen.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 11 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 13 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_2 \leftarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_1 \end{array}} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 - 2 \cdot Z_2 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_2 \end{array}} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 & | & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 - 7 \cdot Z_3 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 + 2 \cdot Z_3 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_3 \end{array}} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -37 & | & -2 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & | & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 + 37 \cdot Z_4 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 - 13 \cdot Z_4 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - 5 \cdot Z_4 \end{array}} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & -39 & -44 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 14 & 15 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Also gilt $\text{Rang}(A) = 4 = m = n$. Darum ist A invertierbar.

Der o. s. Berechnung zufolge gilt insbesondere $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -39 & -44 & 37 \\ 0 & 14 & 15 & -13 \\ 1 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Zu bestimmen:** Eine Darstellung von A als Produkt aus Elementarmatrizen des III. Typs. **Ansatz:** Wir bestimmen mittels Zeilenoperationen Elementarmatrizen E_1, E_2, \dots, E_N , vom Typ III so dass $E_n \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathbf{I}$, wobei \mathbf{I} = die 3×3 -Identitätsmatrix, und daraus erhalten wir die Darstellung, $A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_N^{-1}$. Man beachte dabei, dass das Inverse einer Elementarmatrix III.

Typs wiederum eine Elementarmatrix III. Typs bleibt.

Zeilenoperationen:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{E_1 := S_{1,2}(+1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{E_2 := S_{2,1}(-1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \dots \\
 & \dots & \xrightarrow{E_3 := S_{1,2}(+1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{E_4 := S_{2,3}(+1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \dots \\
 & \dots & \xrightarrow{E_5 := S_{3,2}(-1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{E_6 := S_{2,3}(+1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Also gilt $E_6 \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \mathbf{I}$. Daraus erhalten wir die Darstellung:

$$\begin{aligned}
 A &= (E_6 \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1} \\
 &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_6^{-1} \quad (\text{siehe [Sin20, Lemma 4.3.1(7) od. Lemma 6.3.2]}) \\
 &= S_{1,2}(+1)^{-1} \cdot S_{2,1}(-1)^{-1} \cdot S_{1,2}(+1)^{-1} \cdot S_{2,3}(+1)^{-1} \cdot S_{3,2}(-1)^{-1} \cdot S_{2,3}(+1)^{-1} \\
 &= \boxed{S_{1,2}(-1) \cdot S_{2,1}(+1) \cdot S_{1,2}(-1) \cdot S_{2,3}(-1) \cdot S_{3,2}(+1) \cdot S_{2,3}(-1)}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.2

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper und A eine $m \times n$ -Matrix. Wir betrachten die kanonisch definierte lineare Abbildung, $\varphi_A : K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$, und wollen [Sin20, Korollar 6.3.15] hier beweisen. Zunächst aber machen wir ein paar allgemeine Beobachtungen.

Beobachtung 11.1 Per Definition und laut [Sin20, Lemma 5.4.7] gilt $\text{Rang}(A) \stackrel{\text{Defn}}{=} \text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$. Folglich gelten stets $\text{Rang}(A) \leq m$ und $\text{Rang}(A) \leq n$. \diamond

Beobachtung 11.2 Laut [Sin20, Korollar 6.3.13] gilt $\text{Rang}(\varphi_A) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_A)) = \text{Rang}(A)$. \diamond

(a)

Behauptung. φ_A ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) \geq n$. \diamond

Beweis. Für diesen Beweis machen wir von der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (siehe [Sin20, 6.1.10 Korollar]) Gebrauch. Es gilt

$$\begin{array}{lcl}
 \varphi_A \text{ injektiv} & \Leftrightarrow & \text{Kern}(\varphi_A) = \{0\} \quad (\text{siehe [Sin20, Lemma 6.1.4(1)])} \\
 & \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} & \dim(\text{Kern}(\varphi_A)) = 0 \\
 & \stackrel{\text{Dimensionsformel}}{\Leftrightarrow} & \dim(K^n) - \dim(\text{Rang}(\varphi_A)) = 0 \\
 & \Leftrightarrow & \dim(\text{Rang}(\varphi_A)) = n \\
 & \Leftrightarrow & \text{Rang}(A) = n \quad (\text{siehe Beobachtung 11.2}) \\
 & \Leftrightarrow & \text{Rang}(A) \geq n.
 \end{array}$$

Hierbei gilt (*), da $\text{Kern}(\varphi_A)$ ein linearer Unterraum von K^n ist, und da $\dim(U) = 0 \Leftrightarrow U = \{0\}$ für alle linearen Unterräume, $U \subseteq K^n$. Und die letzte doppelte Implikation gilt, weil laut Beobachtung 11.1 $\text{Rang}(A) \leq n$ stets gilt. Den o. s. doppelten Implikationen zufolge gilt die Behauptung. \blacksquare

(b)

Behauptung. φ_A ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) \geq m$. \diamond

Beweis. Da φ_A linear ist, ist $U := \text{Bild}(\varphi_A)$ ein linearer Unterraum von K^m (siehe [Sin20, Lemma 6.1.3]). Laut [Sin20, Satz 5.4.3(1)], da $U \subseteq K^m$ ein linearer Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraumes ist, gilt $U = K^m \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(K^m) (= m)$. Darum gilt

$$\begin{array}{lcl}
 \varphi_A \text{ surjektiv} & \stackrel{\text{Defn}}{\Leftrightarrow} & \text{Bild}(\varphi_A) = K^m \\
 & \Leftrightarrow & U = K^m \\
 & \Leftrightarrow & \dim(U) = m \\
 & \Leftrightarrow & \dim(\text{Bild}(\varphi_A)) = m \\
 & \Leftrightarrow & \text{Rang}(A) = m \quad (\text{siehe Beobachtung 11.2}).
 \end{array}$$

Da laut Beobachtung 11.1 $\text{Rang}(A) \leq m$ stets gilt, wissen wir außerdem, dass $\text{Rang}(A) = m \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \geq m$. Laut der o. s. Implikationen gilt also φ_A ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = m \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \geq m$. Also gilt die Behauptung. \blacksquare

(c)

Behauptung. φ_A ist bijektiv $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = m = n$. \diamond

Beweis. (\Rightarrow). Angenommen, φ_A sei bijektiv. Das heißt, φ_A ist injektiv und surjektiv. Aus den anderen Teilaufgaben folgt $\text{Rang}(A) \geq \max\{m, n\}$. Darum gilt $\max\{m, n\} \leq \text{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$ (siehe Beobachtung 11.1). Folglich gelten $m = n$ und $\text{Rang}(A) = m = n$.

(\Leftarrow). Aus $\text{Rang}(A) = m = n$ folgen $\text{Rang}(A) \geq m$ und $\text{Rang}(A) \geq n$. Laut der anderen Teilaufgaben ist φ_A somit injektiv und surjektiv, also bijektiv. \blacksquare

Aufgabe 11.3

(a)

Behauptung. Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Seien A, B $n \times n$ -Matrizen über K . Falls $AB = \mathbf{I}$, so gilt $BA = \mathbf{I}$. ◇

Beweis. Aus $AB = \mathbf{I}$, folgt

$$\varphi_B(x) = \varphi_B(x') \implies Bx = Bx' \implies x = Ix = ABx = ABx' = Ix' = x'$$

für alle $x, x' \in K^n$. Darum ist φ_B injektiv. Da $\varphi_B : K^n \rightarrow K^n$ eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen Räumen der gleichen Dimension, gilt laut [Sin20, Korollar 6.1.11], dass φ_B auch surjektiv und somit bijektiv ist. Darum existiert eine eindeutige (lineare) Abbildung, $\rho : K^n \rightarrow K^n$, so dass $(\dagger) \rho \circ \varphi_B = \varphi_B \circ \rho = \text{id}$. Daraus folgt, dass $\varphi_A = \rho$, da

$$\varphi_A = \varphi_A \circ \text{id} \stackrel{(\dagger)}{=} \varphi_A \circ (\varphi_B \circ \rho) = (\underbrace{\varphi_A \circ \varphi_B}_{=\varphi_{AB}=\varphi_{\mathbf{I}}=\text{id}}) \circ \rho = \text{id} \circ \rho = \rho.$$

Darum gilt $\varphi_{BA} = \varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_B \circ \rho \stackrel{(\dagger)}{=} \text{id} = \varphi_{\mathbf{I}}$, woraus sich $BA = \mathbf{I}$ ergibt. ■

(b)

Behauptung. Seien $r, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Seien A eine $n \times n$ -Matrix über K mit $A^r = \mathbf{0}$. Dann ist $\mathbf{I} - A$ invertierbar. ◇

Beweis. Laut Teil (a) reicht es aus, eine $n \times n$ -Matrix, B , zu finden, so dass $(\mathbf{I} - A)B = \mathbf{I}$. Wir

untersuchen $B := \sum_{i=0}^{r-1} A^i$, wobei wir hier $A^0 := \mathbf{I}$ festlegen.^a Es gilt

$$\begin{aligned} AB &= (\mathbf{I} - A) \sum_{i=0}^{r-1} A^i \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} A^i - A \sum_{i=0}^{r-1} A^i \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} A^i - \sum_{i=0}^{r-1} AA^i \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} A^i - \sum_{i=0}^{r-1} A^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} A^i - \sum_{i=1}^r A^i \\ &= A^0 - A^r \quad (\text{Teleskopsumme}) \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{0} \quad (\text{per Voraussetzung}). \end{aligned}$$

Darum gilt $(\mathbf{I} - A)B = \mathbf{I}$ und damit laut Teil (a) $B(\mathbf{I} - A) = \mathbf{I}$. Insbesondere ist $\mathbf{I} - A$ invertierbar, und zwar durch B . ■

^aDiese Definition ist nicht willkürlich, sondern zielführend, um algebraische Identitäten wie etwa das Additionsgesetz für Exponenten zu garantieren.

Bonusaufgabe 11.4

- (a) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_4)$ über dem Körper \mathbb{R} ist **linear**, da $f = \varphi_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_4)$ über dem Körper \mathbb{C} ist **linear**, da $f = \varphi_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2i & 1 \end{pmatrix}$.
- (c) $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, 1, x_1)$ über dem Körper \mathbb{Q} ist **nicht linear**, weil $f(\mathbf{0}) = (0, 1, 0) \neq \mathbf{0}$, während $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ für lineare Abbildungen gelten muss (siehe [Sin20, Lemma 6.1.2]).
- (d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2} \cdot x$ über dem Körper \mathbb{R} ist **linear**, da f hier nichts anders als Skalarmultiplikation ist, und Skalarmultiplikation ist linear.
- (e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ über dem Körper \mathbb{R} ist **nicht linear**, da bspw. $f(3) = 9 \neq 3 \cdot 1 = 3 \cdot f(1)$, d. h., das Homogenitätsaxiom ist offensichtlich verletzt.
- (f) $f : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$ über dem Körper \mathbb{F}_2 ist gleich der Identitätsabbildung, da $x^2 = x$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$. Damit ist f trivialerweise **linear**.
- (g) $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2, x_1 + x_2)$ über dem Körper \mathbb{R} ist **nicht linear**, da bspw. $f(3, 3) = (9, 6) \neq 3 \cdot (1, 2) = 3 \cdot f(1, 1)$, d. h., das Homogenitätsaxiom ist offensichtlich verletzt.

Bonusaufgabe 11.5

Sei $A := \begin{pmatrix} 11 & -5 & 4 & 6 \\ -15 & 7 & -6 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, eine $m \times n$ -Matrix über dem Körper \mathbb{Q} , mit $m = n = 4$. Unser **Ziel** besteht darin, invertierbare Matrizen, $P \in \mathbb{Q}^{m \times m}$ und $Q \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, zu bestimmen, so dass $P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wie in [Sin20, Satz 6.3.10]. Um eine Möglichkeit für P zu bestimmen, berechnen wir die Zeilenstufenform der augmentierten Matrix $(A|\mathbb{1})$, und entnehmen aus der rechten Hälfte P .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 11 & -5 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 7 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{Z_2 \leftarrow 15 \cdot Z_1 + 11 \cdot Z_2 \\ Z_3 \leftarrow 2 \cdot Z_1 - 11 \cdot Z_3}} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 11 & -5 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 15 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & -11 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow 5 \cdot Z_2 + 2 \cdot Z_1 \\ Z_4 \leftarrow Z_2 - 2 \cdot Z_3}} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 22 & 0 & -22 & 22 & 77 & 55 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 15 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 11 & 22 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 : 11 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 : 11}} & \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & 15 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Setze also $P := \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 15 & 11 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Unter dieser Wahl gilt $P \cdot A =$ linke Hälfte der letzten Matrix in der o. s. Berechnung.

Um nun Q zu bestimmen, führen wir den gleichen Ansatz auf $(P \cdot A)^T$ aus, bis die erwünschte (transponierte) Form erreicht ist. D. h., wir starten jetzt mit $((P \cdot A)^T | \mathbb{1})$, reduzieren, und zum Schluss entnehmen wir Q als die transponierte rechte Hälfte des Resultates:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_1}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{Z_3 \leftarrow Z_3 + 3 \cdot Z_2 \\ Z_4 \leftarrow Z_4 - Z_2}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow Z_1 : 2 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 : 2}} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Setze also $Q := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Der o. s. Berechnung zur Folge gilt $Q^T \cdot (P \cdot A)^T = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit sollte $P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gelten. Wir prüfen dies und erhalten:

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Darum sind P, Q in der Tat passende invertierbare Matrizen, so dass $P \cdot A \cdot Q$ der erwünschten Form ist.

TEIL II
Selbstkontrollenaufgaben

SKA Blatt 4

Woche 4

SKA 4.1

Seien X, Y nicht leere Mengen. Einer Abbildung, $f : X \rightarrow Y$, können wir eindeutig die Relation $\text{Gph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$ zuordnen. Dies nennt sich der **Graph von f** (siehe [Sin20, §2.3]—dort wird dies mit Γ_f bezeichnet). Hier ist $\text{Gph}(f)$ also eine Relation auf $X \times Y$. In der Tat setzen manche Werke Funktionen mit ihrem Graphen gleich (siehe bspw. [Jec97, S.11]), aber dies ist streng genommen nicht die ganze Wahrheit.

SKA 4.2

Hinweis: Hier scheint im Punkt (ii) etwas verwechselt worden zu sein.

Seien M, N Mengen und $R \subseteq M \times N$.

Behauptung 4.1 Angenommen, R erfülle folgende Eigenschaften:

- (i) $\forall x \in M : \exists y \in N : (x, y) \in R$
- (ii) $\forall x \in M : \forall y, y' \in N : (x, y), (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$

Dann existiert eine (notwendigerweise eindeutige) Funktion, $f : M \rightarrow N$, so dass $\text{Gph}(f) = R$. ◇

Beweis. Wir definieren $f : M \rightarrow N$ durch

$$f(x) = y$$

für $(x, y) \in R$. Offensichtlich gilt $\text{Gph}(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid f(x) = y\} = \{(x, y) \in M \times N \mid (x, y) \in R\} = R$.

Zu zeigen: (1) f ist überall definiert; (2) f ist wohldefiniert.

Überall definiert: Sei $x \in M$. **Zu zeigen:** $f(x) = y$ für ein $y \in N$.

Eigenschaft (i) besagt, dass ein $y \in N$ existiert, so dass $(x, y) \in R$. Per Konstruktion erhalten wir, dass $f(x) = y$ gilt.

Wohldefiniertheit: Seien $x \in M$ und $y, y' \in N$. Angenommen, $f(x) = y$ und $f(x) = y'$.

Zu zeigen: $y = y'$.

Aus $f(x) = y$ und $f(x) = y'$ folgt $(x, y), (x, y') \in R$ per Konstruktion von f . Eigenschaft (ii) besagt, dass $y = y'$.

Darum ist f eine Abbildung zwischen M und N und $\text{Gph}(f) = R$. ■

SKA 4.3

Sei $X = \{a, b, c\}$ und betrachte die binäre Relation, $(\mathcal{P}(X), \leq)$, definiert durch

$$A \leq B \iff X \setminus A \subseteq X \setminus B$$

für $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Behauptung. $(\mathcal{P}(X), \leq)$ ist eine partielle Ordnung (auch »Halbordnung« genannt). ◇

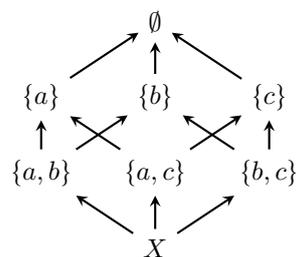
Es gibt nun 3 Ansätze, um dies zu zeigen.

Beweis (Ansatz I). Beobachte, dass für $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} A \leq B &\stackrel{\text{Defn}}{\iff} X \setminus A \subseteq X \setminus B \\ &\implies X \setminus (X \setminus A) \supseteq X \setminus (X \setminus B) \\ &\implies A \supseteq B, \text{ da } A, B \subseteq X \\ &\implies X \setminus A \subseteq X \setminus B \\ &\stackrel{\text{Defn}}{\iff} A \leq B, \end{aligned}$$

also $A \leq B \iff A \supseteq B$. Darum kann $(\mathcal{P}(X), \leq)$ mit $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$ identifiziert werden. Letzteres ist bekanntermaßen eine Halbordnung. ■ (Ansatz I)

Beweis (Ansatz II). Im konkreten Falle von $X = \{a, b, c\}$ können wir die Relation durch ein *Hasse-Diagramm* skizzieren:



Man sieht, dass dies einen *Verband* und damit insbesondere eine Halbordnung bildet. ■ (Ansatz II)

Beweis (Ansatz III). Wir gehen die Axiome einer Halbordnung durch:

Reflexivität: Sei $A \in \mathcal{P}(X)$ beliebig. **Zu zeigen:** $A \leq A$.

Offensichtlich gilt $X \setminus A \subseteq X \setminus A$.

Per Konstruktion gilt also $A \leq A$.

Antisymmetrie: Seien $A, A' \in \mathcal{P}(X)$ beliebig.

Zu zeigen: $A \leq A'$ und $A' \leq A \implies A = A'$.

Es gilt

$$\begin{aligned} A \leq A' \text{ und } A' \leq A &\iff X \setminus A \subseteq X \setminus A' \text{ und } X \setminus A' \subseteq X \setminus A && \text{(per Konstruktion)} \\ &\implies X \setminus A = X \setminus A' && \text{(per Definition von Mengengleichheit)} \\ &\implies A = A', && \text{da } A, A' \subseteq X. \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $A, A', (A'', B'') \in \mathcal{P}(X)$ beliebig.

Zu zeigen: $A \leq A'$ und $A' \leq A'' \implies A \leq A''$.

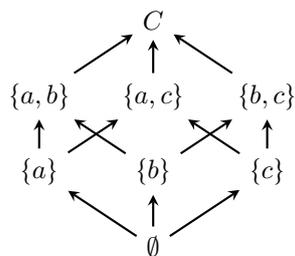
Es gilt

$$\begin{aligned} A \leq A' \text{ und } A' \leq A'' &\iff X \setminus A \subseteq X \setminus A' \text{ und } X \setminus A' \subseteq X \setminus A'' \text{ (per Konstruktion)} \\ &\implies X \setminus A \subseteq X \setminus A'' \\ &\iff A \leq A'' \text{ (per Konstruktion)}. \end{aligned}$$

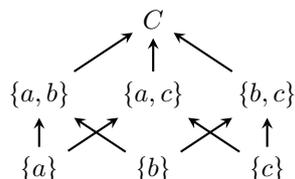
Darum erfüllt $(\mathcal{P}(X), \leq)$ die Axiome einer Halbordnung. ■ (Ansatz III)

SKA 4.4

Betrachten wir die Halbordnung aus [Sin20, Beispiel 2.4.2(2)]. Es sei also $C = \{a, b, c\}$ und die durch folgendes *Hasse-Diagramm* dargestellte Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(C)$:



Wenn wir das Element \emptyset von $\mathcal{P}(C)$ entfernen sieht die Struktur folgendermaßen aus



Offensichtlich hat $(\mathcal{P}(C) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$ kein kleinstes Element. Die Menge der minimalen Elementen ist durch $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ gegeben. Also gibt es 3 minimale Elemente.

SKA 4.5

Sei W die Menge aller Wörter und Σ die Menge aller Buchstaben. O. E. können wir annehmen, dass jedes Wort $w \in W$ der Länge $|w| \geq 2$ ist. (In Sprachen wie Englisch, Russisch, usw. ist dies nicht der Fall, aber wir könnten diese trivialen Wörter einfach ausschließen.)

Betrachten wir die Relation (W, \sim) gegeben durch

$$w \sim w' \iff f(w) = f(w'), \tag{4.1}$$

wobei $f : W \rightarrow \Sigma$ die Abbildung mit $f(w) = 1$. Buchstabe in w für alle $w \in W$ ist.

Dann per Konstruktion reduziert f die Relation (W, \sim) auf $(\Sigma, =)$. Aufgrund dessen und da $(\Sigma, =)$ eine Äquivalenzrelation ist, ist (W, \sim) automatisch eine Äquivalenzrelation auch.

Eigentlich spielt es keine Rolle, wie die Funktion, f , aussieht. Solange die Reduktion (4.1) gilt, bleibt (W, \sim) eine Äquivalenzrelation. Dies gilt also insbesondere ebenfalls, wenn f den zweitletzten Buchstaben von Wörtern berechnet.

SKA 4.6

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=2}^6 (-1)^i i^2 &= (-1)^2 \cdot 2^2 + (-1)^3 \cdot 3^2 + (-1)^4 \cdot 4^2 + (-1)^5 \cdot 5^2 + (-1)^6 \cdot 6^2 \\ &= 4 - 9 + 16 - 25 + 36 = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \prod_{j=1}^4 (2j - 1) &= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) \\ &= 1 - 3 + 5 - 7 = -4 \end{aligned}$$

SKA 4.7

Behauptung 4.2 *Bezeichne mit $\Phi(n)$ die Aussage*

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 = (-1)^n \frac{1}{2} n(n+1). \tag{4.2}$$

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ◇

Beweis. Wir zeigen Behauptung 4.2 stumpf per Induktion.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 &= (-1)^1 1^2 = -1 \\ (-1)^n \frac{1}{2} n(n+1) &= (-1)^1 \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = -1\end{aligned}$$

Also gilt (4.2). Also gilt $\Phi(1)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 1$. Angenommen, $\Phi(n-1)$ gilt.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $\Phi(n)$ gilt, d. h. Gleichung (4.2) gilt.
Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i i^2 + (-1)^n n^2 \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{2} (n-1)(n-1+1) + (-1)^n n^2 \\ &\quad \text{wegen der IV} \\ &= (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{2} n(n-1) + n^2\right) \\ &= (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + n^2\right) \\ &= (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n\right) \\ &= (-1)^n \frac{1}{2} n(n+1).\end{aligned}$$

Also gilt (4.2). Also gilt $\Phi(n)$.

Also gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ■

Für die Summe $\sum_{i=3}^n (-1)^i i^2$ ist der Ausdruck lediglich

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^n (-1)^i i^2 &= \sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 - (-1)^1 \cdot 1 - (-1)^2 2^2 \\ &= (-1)^n \frac{1}{2} n(n+1) - 3\end{aligned}$$

für alle $n \geq 3$. Sollten wir dies per Induktion beweisen wollen, brauchen wir lediglich im o. s. Beweis den **Induktionsanfang** auf $n = 3$ zu ändern. Der Rest bleibt erhalten.

Bemerkung 4.3 Man merkt, dass Induktion mit Deduzieren (\gg Ableiten \ll) nichts zu tun hat. Induktion ist schließlich nur ein Werkzeug, um Behauptungen zu *verifizieren*. Sie verschafft uns aber keine Mittel, um *auf die Behauptungen zu kommen*. In diesem konkreten Falle wurde Vorarbeit geleistet und *direkt* argumentiert, um auf den Ausdruck in (4.2) zu kommen. Ohne diese Arbeit wären wir auf diesen Ausdruck gar nicht gekommen. In dieser Vorarbeit steckt also die eigentliche mathematische Arbeit und dies bedarf etwas Kreativität, Intuition, usw. Häufig reicht diese Vorarbeit aber nur, um auf eine sinnvolle Behauptung zu kommen, und zum Schluss runden wir dies mit Induktion ab, um formal die behauptete Aussage zu bestätigen. Das ist die eigentliche Rolle von Induktion als Beweismittel. ◇

SKA 4.8

Kurzes Argument:

Wenn jede Farbe jeweils auf maximal 1 Karte vorkommt, gibt es $\leq 4 \cdot 1$ Karten. Aber 5 Karten werden gewählt.

Ausführliches Argument:

Seien $X := \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ die Menge der Farben und $Y := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Indizes der Karten. Sei $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ die Funktion, die der Wahl entspricht, d. h.

$$f(x) = \{y \in Y \mid \text{Karte } y \text{ hat Farbe } x\}$$

für alle Farben $x \in X$.

Nun, jede Karte, $y \in Y$, hat eine Farbe, sodass $y \in f(x)$ für ein $x \in X$. Also $Y \subseteq \bigcup_{x \in X} f(x)$. Und per Definition $f(x) \subseteq Y$ für alle $x \in X$. Darum $\bigcup_{x \in X} f(x) \subseteq Y$. Also

$$Y = \bigcup_{x \in X} f(x)$$

Andererseits sind die Mengen $(f(x))_{x \in X}$ paarweise disjunkt, da jede Karte höchstens eine Farbe hat. Also ist $(f(x))_{x \in X}$ eine *Partition* von Y . Darum

$$\begin{aligned}|Y| &= \left| \bigcup_{x \in X} f(x) \right| = \sum_{x \in X} |f(x)| \leq |X| \cdot \max_{x \in X} |f(x)| \\ \implies \max_{x \in X} |f(x)| &\geq |Y|/|X| = 5/4 > 1 \\ \implies \exists x \in X : |f(x)| &> 1 \\ \implies \exists x \in X : |f(x)| &\geq 2\end{aligned}$$

Nach der Definition von f heißt dies, es gibt eine Farbe, $x \in \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, so dass ≥ 2 der gezogenen Karten der Farbe x sind.

SKA 4.9

Kurzes Argument:

Wenn jeder Kalendartag jeweils von maximal 17 Studierenden gefeiert wird, gibt es $\leq 366 \cdot 17 = 6222$ Studierende. Aber es gibt ≥ 7000 Studierende.

Ausführliches Argument:

Seien $X = \{1. \text{ Jan}, 2. \text{ Jan}, \dots, 31. \text{ Dez}\}$ die Menge der Kalendartage und $Y = \{x \mid x \text{ ein/e Studierende/r an der Uni Leipzig}\}$. Sei $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ die Funktion, die der Wahl entspricht, d. h.

$$f(x) = \{y \in Y \mid \text{Studierende/r } y \text{ hat am Tag } x \text{ Geburtstag}\}$$

für alle Kalendartage $x \in X$.

Nun, jede/r Studierende/r, $y \in Y$, hat einen Geburtstag, sodass $y \in f(x)$ für ein $x \in X$. Also $Y \subseteq \bigcup_{x \in X} f(x)$. Und per Definition $f(x) \subseteq Y$ für alle $x \in X$. Darum $\bigcup_{x \in X} f(x) \subseteq Y$. Also

$$Y = \bigcup_{x \in X} f(x)$$

Andererseits sind die Mengen $(f(x))_{x \in X}$ paarweise disjunkt, da jede/r Studierende/r höchstens einen Geburtstag hat. Also ist $(f(x))_{x \in X}$ eine *Partition* von Y . Darum

$$\begin{aligned} |Y| &= \left| \bigcup_{x \in X} f(x) \right| = \sum_{x \in X} |f(x)| \leq |X| \cdot \max_{x \in X} |f(x)| \\ \implies \max_{x \in X} |f(x)| &\geq |Y|/|X| \geq 7000/366 > 19 \\ \implies \exists x \in X : |f(x)| &> 19 \\ \implies \exists x \in X : |f(x)| &\geq 20 \end{aligned}$$

Nach der Definition von f heißt dies, es gibt einen Kalendartag, $x \in \{1. \text{ Jan}, 2. \text{ Jan}, \dots, 31. \text{ Dez}\}$, so dass mindestens 20 Studierende x als Geburtstag feiern. Insbesondere gibt es 18 Menschen, die den gleichen Geburtstag feiern.

SKA 4.10

Behauptung 4.4 *Bezeichne mit $\Phi(n)$ die Aussage*

- Für alle endlichen Mengen, E_1, E_2, \dots, E_n , gilt $|\prod_{i=1}^n E_i| = \prod_{i=1}^n |E_i|$.

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ◇

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion mit den Fällen $n \leq 2$ als Induktionsanfang.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann für alle Mengen, E_1

$$|\prod_{i=1}^1 E_i| = |E_1| = \prod_{i=1}^1 |E_i|$$

Also gilt $\Phi(1)$.

Sei $n = 2$. Laut Lemma 4.5 (siehe unten) gilt für alle endlichen Mengen E_1, E_2

$$|\prod_{i=1}^2 E_i| = |E_1 \times E_2| = |E_1| \cdot |E_2| = \prod_{i=1}^2 |E_i|.$$

Also gilt $\Phi(2)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 2$. Angenommen, $\Phi(n-1)$ gilt.

Induktionsschritt: Seien E_1, E_2, \dots, E_n beliebige endliche Mengen.

Zu zeigen: $|\prod_{i=1}^n E_i| = \prod_{i=1}^n |E_i|$ gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned} |\prod_{i=1}^n E_i| &= |\prod_{i=1}^{n-1} E_i \times E_n| \\ &= |\prod_{i=1}^{n-1} E_i| \cdot |E_n|, \quad \text{da } \Phi(2) \text{ gilt} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} |E_i| \cdot |E_n| \quad \text{wegen der IV} \\ &= \prod_{i=1}^n |E_i|. \end{aligned}$$

Also gilt $\Phi(n)$.

Also gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ■

Wir müssen noch den Fall für 2 Mengen beweisen.

Lemma 4.5 Seien X, Y beliebige endliche Mengen. Dann $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. ◇

Beweis. Wir zeigen dies direkt. Seien $m := |X|$ und $n := |Y|$. Wegen Endlichkeit liegen m, n in \mathbb{N}_0 .

Falls $m = 0$ oder $n = 0$, so gilt $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ und damit

$$|X \times Y| = |\emptyset| = 0 = m \cdot n = |X| \cdot |Y|.$$

Beschränken wir uns also auf den Fall $m, n > 0$. Per Definition von Kardinalität (siehe [Sin20, §3.3, S.54]) existieren also Bijektionen

$$\begin{aligned} f &: \{0, 1, \dots, m-1\} \rightarrow X, \\ g &: \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow Y. \end{aligned}$$

(Wir fangen aus praktischen Gründen mit 0 statt 1 an.)

Definiere nun

$$\begin{aligned} h &: \{0, 1, \dots, mn-1\} \mapsto X \times Y \\ &: k \mapsto (f(\text{mod}(k, m)), g(\lfloor k/m \rfloor)), \end{aligned}$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ die Gaußklammerfunktion, die reelle Zahlen *abrundet*.

Zu zeigen: h ist eine wohldefinierte Bijektion.

Wohldefiniertheit: Für alle $k \in \{0, 1, \dots, mn-1\}$ gilt $i := \text{mod}(k, m) \in \{0, 1, \dots, m-1\} = \text{dom}(f)$ und $j := \lfloor k/m \rfloor \in \{0, 1, \dots, n-1\} = \text{dom}(g)$, sodass $f(i) \in X$ und $g(j) \in Y$ und damit $h(k) = (f(i), g(j)) \in X \times Y$.

Injektivität: Seien $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, mn-1\}$ beliebig. **Zu zeigen:** $h(k_1) = h(k_2) \Rightarrow k_1 = k_2$.
Nach [Sin20, Satz 3.4.2] existieren (eindeutige) Werte $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ und $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, so dass

$$\begin{aligned} k_1 &= mq_1 + r_1, \\ k_2 &= mq_2 + r_2. \end{aligned} \tag{4-3}$$

Daraus lässt sich ableiten, dass $\text{mod}(k_1, m) = r_1$, $\text{mod}(k_2, m) = r_2$, $\lfloor k_1/m \rfloor = q_1$, und $\lfloor k_2/m \rfloor = q_2$. Darum gilt

$$\begin{aligned} h(k_1) = h(k_2) &\stackrel{\text{Defn}}{\iff} (f(r_1), g(q_1)) = (f(r_2), g(q_2)) \\ &\implies f(r_1) = f(r_2) \text{ und } g(q_1) = g(q_2) \\ &\implies r_1 = r_2 \text{ und } q_1 = q_2 \\ &\quad \text{da } f, g \text{ injektiv sind} \\ &\stackrel{(4-3)}{\implies} k_1 = mq_1 + r_1 = mq_2 + r_2 = k_2. \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei $(x, y) \in X \times Y$. **Zu zeigen:** $(x, y) \in \text{Bild}(h)$.

Wegen der Surjektivität von f, g existieren nun $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ und $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, so dass $f(i) = x$ und $g(j) = y$.

Setze nun $k := mj + i$.

Dann $\text{mod}(k, m) = i$ und $\lfloor k/m \rfloor = j$, sodass $h(k) = (f(i), g(j)) = (x, y)$.

Also gilt $(x, y) \in \text{Bild}(h)$.

Darum ist h eine wohldefinierte Bijektion, woraus sich per Definition von Kardinalität direkt ergibt, dass $|X \times Y| = mn = |X| \cdot |Y|$. ■

SKA 4-11

Um ein Argument zurückzuweisen, reicht es häufig aus, das Argument einfach *ausführlich* aufzuschreiben. Wir nehmen die Ausführung und formalisieren diese:

Behauptung. Bezeichne mit $G(x)$, dass x ein Goldfisch ist. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit $\Phi(n)$ folgende Aussage

- Für alle n -elementigen Mengen, X , von Fischen, wenn $\exists x \in X : G(x)$, dann $\forall x \in X : G(x)$.

Dann $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$ ◇

Beweis (ungültiges Argument). Dies wird per Induktion argumentiert.

Induktionsanfang: Betrachte eine 1-elementige Menge, X , von Fischen.

Angenommen, ein $x_0 \in X$ mit $G(x_0)$ existiere.

Da X nur dieses eine Element enthält, gilt offensichtlich $\forall x \in X : G(x)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Angenommen, $\Phi(n)$ gilt.

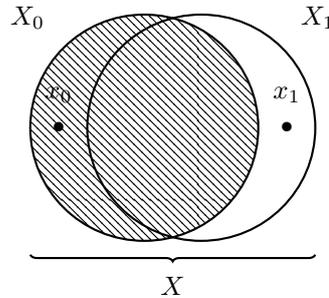
Induktionsschritt: Sei X eine $n + 1$ -elementige Menge von Fischen.

Angenommen, ein $x_0 \in X$ mit $G(x_0)$ existiere. **Zu zeigen:** Für alle $x \in X$ gilt $G(x)$.

Fixiere einen anderen Fisch $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$, was möglich ist, weil $|X| = n + 1 \geq 2$.

Setze $X_0 := X \setminus \{x_1\}$ und $X_1 := X \setminus \{x_0\}$.

Da $x_1 \neq x_0$, sind X_0, X_1 verschiedene n -elementige Mengen:



Fokussieren wir uns zunächst auf X_0 (die schattierte Teilmenge).

Da X_0 n -elementig ist und $x_0 \in X_0$ und $G(x_0)$, gilt per IV (†) $\forall x \in X_0 : G(x)$.

Wähle nun irgendeinen der Fische, $\tilde{x} \in X_0$ und setze $X' := X \setminus \{\tilde{x}\}$.

O. E. können wir $\tilde{x} := x_0$ wählen, sodass $X' = X_1$ gilt.

Die Teilmenge X_1 ist nun eine n -elementige Menge mit mindestens $n - 1$ Goldfischen.

Also $\exists x \in X_1 : G(x)$.

Per IV gilt also $\forall x \in X_1 : G(x)$.

Daraus und aus (†) folgt $\forall x \in X : G(x)$, da ja $X = X_0 \cup X_1$.

Darum gilt $\Phi(n + 1)$.

Darum gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ■

Das Problem mit diesem Argument steckt im Induktionsschritt an genau dieser Stelle:

Also $\exists x \in X' : G(x)$.

Im ursprünglichen Text ist dies die problematische Stelle:

Jetzt können wir aber auch einen der Goldfische rausnehmen und haben wieder ein Aquarium mit n Fischen und mindestens einem Goldfisch.

Zurück aber zu unserer Formalisierung:

Wir haben etwas ausführlicher gezeigt, dass die Menge X' mindestens $n - 1$ Goldfische enthält. Wenn wir $\tilde{x} := x_0$ wählen entspricht dies der Größe des Schnitts $X_0 \cap X_1$. Das Diagramm mag andeuten, dass dieser Schnitt nicht leer ist, aber das Diagramm täuscht. Wir brauchen $n \geq 2$, damit der Schnitt nicht leer ist. Aber im Induktionsschritt wird nur $n \geq 1$ vorausgesetzt.

Kurzgesagt, das heißt das Induktionsargument ist faul, weil der Schritt $1 \rightsquigarrow 2$ implizit übersprungen wird.

SKA Blatt 5

Woche 5

SKA 5.2

Betrachtet sei die Teilbarkeitsrelation $(\mathbb{Z}, |)$. Wir prüfen, welche Axiome erfüllt sind und beurteilen aufgrund dessen, ob es sich um eine Äquivalenzrelation, partielle Ordnung, Abbildung, usw. handelt.

Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu prüfen:** $a | a$?

Es gilt $a = 1 \cdot a$ und $1 \in \mathbb{Z}$.

Darum gilt $a | a$.

Also ist $(\mathbb{Z}, |)$ **reflexiv**.

Symmetrie: Betrachte bspw. $2, 10 \in \mathbb{Z}$.

Es gilt $2 | 10$ aber $10 \nmid 2$.

Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ **nicht symmetrisch**.

Antisymmetrie: Betrachte bspw. $2, -2 \in \mathbb{Z}$.

Es gelten $2 | -2$ und $-2 | 2$, aber $2 \neq -2$.

Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ **nicht antisymmetrisch**.

Transitivität: Seien, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. **Zu prüfen:** $(a | b \text{ und } b | c) \Rightarrow a | c$?

Es gilt:

$$\begin{aligned} a | b \text{ und } b | c &\iff \exists k, j \in \mathbb{Z} : c = kb, b = ja \\ &\implies \exists k, j \in \mathbb{Z} : c = (kj)a \\ &\implies \exists m \in \mathbb{Z} : c = ma \\ &\iff a | c. \end{aligned}$$

Also ist $(\mathbb{Z}, |)$ **transitiv**.

Totalität: Betrachte bspw. $5, 7 \in \mathbb{Z}$.

Dann $5 \nmid 7$, $7 \nmid 5$, und $5 \neq 7$.

Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ **nicht total**.

Linkstotalität: Sei $a \in \mathbb{Z}$. **Zu prüfen:** $\exists b \in \mathbb{Z} : a | b$?

Wegen Reflexivität gilt nun $a | a$.

Also ist $(\mathbb{Z}, |)$ **linkstotal**.

Rechtseindeutigkeit: Betrachte bspw. $2, 10, 100 \in \mathbb{Z}$.

Es gilt $2 | 10$ und $2 | 100$, aber $10 \neq 100$.

Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ **nicht rechtseindeutig**.

Daraus folgt, dass $(\mathbb{Z}, |)$ weder eine Äquivalenzrelation noch eine (lineare) Ordnungsrelation noch eine partielle Ordnungsrelation ist. Und es gibt keine Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, so dass $\text{Gph}(f) = |$.

Bemerkung: Man kann aber zeigen, dass die Beschränkungen $(\mathbb{N}_0, |)$ und $(\mathbb{N}, |)$ zusätzlich Antisymmetrie aufweisen, sodass diese partielle Ordnungsrelationen sind.

SKA 5.3

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b > 0$. Um a durch b (mit Rest) zu teilen, setzt man

$$\begin{aligned} q &:= [a/b] \in \mathbb{Z} \\ r &:= a - b \cdot q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

wobei $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ die Gaußklammerfunktion ist, die reelle Zahlen *abrundet*. Per Definition gilt

$$q \leq a/b < q + 1$$

also

$$0 \leq a - b \cdot q < b$$

Darum $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Um dies aber *per Hand* bzw. im Kopf zu machen, verwendet man iterative Algorithmen, die aus Schritten besteht: a und b durch »einfachere« Zahlen ersetzen; mit einfacheren Zahlen teilen; Nachjustieren.

Welche Methode auch immer man anwendet hat dies mit dem Existenz-Teil des Beweises zu tun.

SKA 5.4

Behauptung 5.1 *Es gilt*

- (i) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$;
- (ii) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(|a|, |b|)$;
- (iii) $\text{ggT}(a, 0) = \text{ggT}(0, a) = |a|$, solange $a \neq 0$;
- (iv) $\text{ggT}(ca, cb) = |c| \text{ggT}(a, b)$, solange $b, c \neq 0$;

für $a, b, c \in \mathbb{Z}$. ◇

Beweis. (i): Es gilt $\text{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a, b\} = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid b, a\} = \text{ggT}(b, a)$.

(ii): Sei $d, x \in \mathbb{Z}$. Dann ist es einfach zu sehen, dass $d \mid x \Leftrightarrow d \mid |x|$.

Darum gilt $\text{ggT}(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a, b\} = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid |a|, |b|\} = \text{ggT}(|a|, |b|)$.

(iii): Laut (i) reicht es aus zu zeigen $\text{ggT}(a, 0) = |a|$.

Es gilt $\text{ggT}(a, 0) = \max D$, wobei $D := \{d \in \mathbb{N} : d \mid a, 0\}$.

(I) Setze $d_0 := |a| > 0$. Offensichtlich gilt $d_0 \mid a, 0$.

(II) Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt $d \mid a \Rightarrow |a/d| \geq 1$ (da $a, d \neq 0$) $\Rightarrow d \leq |a| = d_0$.

Daraus ergibt sich,

$$d_0 \stackrel{(I)}{=} D \subseteq \{d \in \mathbb{N} : d \mid a\} \stackrel{(II)}{\subseteq} \{d \in \mathbb{N} : d \leq d_0\}$$

woraus sich ergibt, dass $d_0 \leq \max D \leq d_0$. Also $\text{ggT}(a, 0) = \max D = d_0 = |a|$.

(iv): Setze $d_1 := \text{ggT}(a, b)$ und $d_2 := \text{ggT}(ca, cb)$. **Zu zeigen:** $d_2 = |c|d_1$.

Wir zeigen dies durch zwei Ungleichungen.

Es gilt

$$\begin{aligned} d_1 \mid a, b &\iff \exists k, j \in \mathbb{Z} : a = kd_1 \text{ und } b = jd_1 \\ &\iff \exists k, j \in \mathbb{Z} : ca = kcd_1 \text{ und } cb = jcd_1 \\ &\iff \exists k, j \in \mathbb{Z} : ca = k|c|d_1 \text{ und } cb = j|c|d_1 \\ &\quad \text{da man z. B. } k \text{ durch } -k \text{ ersetzen kann} \\ &\iff |c|d_1 \mid ca, cb \end{aligned}$$

Per Maximalität von d_2 unter den positiven Teilern, folgt $|c|d_1 \leq d_2$.

Andererseits existieren nach dem *Lemma von Bézout* $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass

$$d_1 = \text{ggT}(a, b) = ua + vb$$

woraus sich ergibt, dass

$$\frac{|c|d_1}{d_2} = \underbrace{\pm u \frac{ca}{d_2} + \pm v \frac{cb}{d_2}}_{=:w} \quad (5.1)$$

Da $d_2 \mid ca, cb$ ist die rechte Seite von (5.1) in \mathbb{Z} . Und da $|c|, d_1, d_2 > 0$, ist die linke Seite von (5.1) strikt positiv, sodass $w \geq 1$ gilt. Darum $|c|d_1 = w \cdot d_2 \geq 1 \cdot d_2$. ■

Bemerkung. Ohne das *Lemma von Bézout* ist ein Beweis vom Letzten Punkt praktisch unmachbar.

SKA 5.5

Seien $a = 57$ und $b = 21$. Dann gilt $a = qb + r$, wobei $q = 2$ und $r = 15$. Es gilt $\text{ggT}(a, b) = 3^a$ und $\text{ggT}(b, r) = 3^b$. Also gilt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, \text{mod}(a, b))$, genau wie [Sin20, Lemma 3.4.5] allgemein besagt.

SKA 5.6

Für jeden Fall berechnen wir $\text{ggT}(a, b)$ mittels des Euklidischen Algorithmus (siehe [Sin20, Satz 3.4.7]).

a	b	Restberechnung (symbolisch)	Restberechnung (Werte)
1529	170	$a = b \cdot q_1 + r_1$ $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$ $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$1529 = 170 \cdot 8 + 169$ $170 = 169 \cdot 1 + \boxed{1}$ $169 = 1 \cdot 169 + 0$
13758	21	$a = b \cdot q_1 + r_1$ $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$13758 = 21 \cdot 655 + \boxed{3}$ $21 = 3 \cdot 7 + 0$
210	45	$a = b \cdot q_1 + r_1$ $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$ $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$210 = 45 \cdot 4 + 30$ $45 = 30 \cdot 1 + \boxed{15}$ $30 = 15 \cdot 2 + 0$
1209	102	$a = b \cdot q_1 + r_1$ $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$ $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$ $r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$ $r_3 = r_4 \cdot q_5 + r_5$	$1209 = 102 \cdot 11 + 87$ $102 = 87 \cdot 1 + 15$ $87 = 15 \cdot 5 + 12$ $15 = 12 \cdot 1 + \boxed{3}$ $12 = 3 \cdot 4 + 0$

SKA 5.7

Wir verwenden die Berechnungen aus der Tabelle in SKA 5.6.

a	b	Rest (symbolisch)	Rest (Werte)
1529	170	$r_1 = a - 8 \cdot b$ $r_2 = b - 1 \cdot r_1$	$169 = 1 \cdot a + -8 \cdot b$ $\boxed{1 = -1 \cdot a + 9 \cdot b}$
13758	21	$r_1 = a - 655 \cdot b$	$\boxed{3 = 1 \cdot a + -655 \cdot b}$
210	45	$r_1 = a - 4 \cdot b$ $r_2 = b - 1 \cdot r_1$	$30 = 1 \cdot a + -4 \cdot b$ $\boxed{15 = -1 \cdot a + 5 \cdot b}$
1209	102	$r_1 = a - 11 \cdot b$ $r_2 = b - 1 \cdot r_1$ $r_3 = r_1 - 5 \cdot r_2$ $r_4 = r_2 - 1 \cdot r_3$	$87 = 1 \cdot a + -11 \cdot b$ $15 = -1 \cdot a + 12 \cdot b$ $12 = 6 \cdot a + -71 \cdot b$ $\boxed{3 = -7 \cdot a + 83 \cdot b}$

^a weil $r = 3 \cdot 5$ und $3, 5 \in \mathbb{P}$ und nur $3 \mid 57$ gilt.

^b weil $r = 3 \cdot 5$ und $3, 5 \in \mathbb{P}$ und nur $3 \mid 21$ gilt.

SKA 5.8

Das Lemma von Bézout wird mittels des Euklidischen Algorithmus bewiesen.

Korollar 3.4.10 baut darauf und charakterisiert, wann zwei Zahlen teilerfremd sind.

Lemma 3.4.12 baut darauf und zeigt $\forall i : b, a_i \text{ teilerfremd} \Rightarrow b, \prod_{i=1}^n a_i \text{ teilerfremd}$.

Satz 3.4.14 baut darauf und zeigt $p \mid \prod_{i=1}^n a_i \Rightarrow \exists i : p \mid a_i$ für p prim.

Dieses letzte Ergebnis wird im Induktionsargument instrumentalisiert, um Primzerlegungen der Länge k, l auf Primfaktorzerlegungen der Länge $k-1, l-1$ zu reduzieren, um das Induktionsargument voranzubringen.

Bemerkung 5.2 In der Algebra gibt es zwei Begriffe, die bei gewöhnlichen Primzahlen, sich anwenden lassen: *Irriduzibilität* und *prim*. Die Definition in abstrakten Kontexten von *prim* entspricht der Eigenschaft in [Sin20, Satz 3.4.14], während *Irriduzibilität* eher sich auf die Teilbarkeit bezieht. Etwas »Zufälligerweise« handelt es sich bei \mathbb{Z} um eine Art von Struktur, in der diese zwei Konzepte zusammenfallen. Wie in fast allen technischen Bereichen sollte man auf solche »Zufälligkeiten« achten: Irgendwann befindet man sich in einer Situation, wo man feiner unterscheiden muss und es nicht mehr selbstverständlich ist, zwei Konzepte als identisch zu behandeln. ◇

SKA 5.10

Siehe [Sin20, Satz 3.5.1]. Hier eine Alternative:

Für $r = 0$ setze man $q_r := 1$ und $p_r := 0$. Und für alle anderen rationalen Zahlen, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, wähle

$$\begin{aligned} q_r &:= \min \overbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid q_r \cdot r \in \mathbb{Z}\}}^{D(r)} \in \mathbb{N} \\ p_r &:= q_r \cdot r \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Da r rational ist, ist $D(r)$ per Definition nicht leer. Darum ist die Wahl von q_r und p_r wohldefiniert und per Konstruktion gilt $p_r/q_r = r$. (Für $r = 0$ gilt ebenfalls offensichtlich $p_r/q_r = r$.) Damit haben wir die Existenz einer kanonischen Darstellung begründet.

Stimmt dies mit der Konstruktion im [Sin20, Satz 3.5.1] überein?

Für $r = 0$ gilt offensichtlich $\text{ggT}(p_r, q_r) = 1$. Für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt $d := \text{ggT}(p_r, q_r) = 1$, denn sonst wäre $\frac{q_r}{d}$ eine positive natürliche Zahl in $D(r)$, da $\frac{q_r}{d} \cdot r = \frac{q_r \cdot r}{d} = \frac{p_r}{d} \in \mathbb{Z}$, während $\frac{q_r}{d} < q_r$ (strikt), was ein Widerspruch zur Minimalität ist. Darum entspricht unserer Darstellung der im [Sin20, Satz 3.5.1].

SKA 5.12

Behauptung (vgl. [Sin20, Satz 3.5.3]). Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Dann $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = p$. ◇

Beweis. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existieren $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{a}{b})^2 = p$. Wir konstruieren nun per Rekursion eine Folge $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $(\frac{a_n}{b_n})^2 = p$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strikt monoton absteigend ist:

- Setze $a_0 := a$ und $b_0 = b$. Offensichtlich gilt per Wahl $(\frac{a_n}{b_n})^2 = p$.
- Sei $n > 0$. Angenommen, wir haben bereits $((a_k, b_k))_{k=0}^{n-1}$ konstruiert. Aus $(\frac{a_n}{b_n})^2 = p$ folgt nun $a_n^2 = p b_n^2$. Daraus folgt $p \mid a_n \cdot a_n$ und damit gilt (vgl. [Sin20, Satz 3.4.14]) $p \mid a_n$, weil p prim ist. Da $b_n^2 = p \cdot (\frac{a_n}{p})^2$ und da $\frac{a_n}{p} \in \mathbb{Z}$, erhalten wir ebenfalls $p \mid b_n \cdot b_n$ und wiederum $p \mid b_n$.

Setze also $a_{n+1} := \frac{a_n}{p}$ und $b_{n+1} := \frac{b_n}{p}$. Dann wie oben gezeigt wurde, gilt $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ und $b_{n+1} \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})^2 = (\frac{a_n}{b_n})^2 = p$. Und, da $p > 1$, gilt $b_{n+1} < b_n$.

Darum funktioniert die rekursive Konstruktion. Da nun $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine strikt monoton absteigende Folge ist, haben wir einen Widerspruch erreicht, weil (\mathbb{N}, \leq) eine Wohlordnungsrelation ist. ■

SKA 5-13

Behauptung (vgl. [Sin20, Satz 3.5.5]). Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Dann existiert eine Nullstelle von $ax^2 + bx + c$ gdw. $\Delta \geq 0$, wobei $\Delta := b^2 - 4ac$. \diamond

Beweis. Zunächst berechnen wir eine Umformung: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff 4a(ax^2 + bx + c) = 0 \quad \text{da } a \neq 0 \\ &\iff (2ax)^2 + 2b(2ax) + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\iff (2ax + b)^2 = \Delta. \end{aligned} \tag{5-2}$$

Falls $\Delta \geq 0$, so existiert ein $\sqrt{\Delta} \geq 0$ mit $\sqrt{\Delta}^2 = \Delta$. Darum gilt

$$ax^2 + bx + c = 0 \stackrel{(5-2)}{\iff} (2ax + b)^2 = \Delta \iff 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das heißt, falls $\Delta \geq 0$, hat das Polynom reellwertige Nullstellen, und zwar sind die Nullstellen durch $\left\{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ gegeben.

Falls $\Delta < 0$, so existieren keine Nullstellen. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Fixiere eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ und setze $\alpha := 2ax + b \in \mathbb{R}$. Aus (5-2) folgt nun $\Delta = \alpha^2$. Aber $\alpha^2 \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dies ist ein Widerspruch. \blacksquare

SKA 5-14

Die Gruppe von Bijektionen von $\{1, 2\}$ auf $\{1, 2\}$ entspricht der Permutationsgruppe S_2 . Dies hat $2! = 2$ Elemente, die standardgemäß mit folgenden Labels bezeichnet werden:

Label	Beschreibung des Elements
e	Funktion, die alles fixiert
$(1\ 2)$	Funktion, die 1 und 2 tauscht

Die Gruppentafel sieht folgendermaßen aus:

	gh	e	$(1\ 2)$
h	e	$(1\ 2)$	e
g	$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	e

Die Gruppe von Bijektionen von $\{1, 2, 3\}$ auf $\{1, 2, 3\}$ entspricht der Permutationsgruppe S_3 . Dies hat $3! = 6$ Elemente, die standardgemäß mit folgenden Labels bezeichnet werden:

Label	Beschreibung des Elements
e	Funktion, die alles fixiert
$(2\ 3)$	Funktion, die 2 und 3 tauscht
$(1\ 2)$	Funktion, die 1 und 2 tauscht
$(1\ 2\ 3)$	Funktion, die $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ abbildet
$(1\ 3\ 2)$	Funktion, die $1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1$ abbildet
$(1\ 3)$	Funktion, die 1 und 3 tauscht

Die Gruppentafel sieht folgendermaßen aus:

	gh	e	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$
h	e	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$	e
g	$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	e	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
	$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	e	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	e	$(2\ 3)$
	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	e	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)$
	$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$	e

(Achtung: Tafel wurde per Code generiert, also ist die Reihenfolge möglicherweise nicht »ästhetisch«.)

SKA 5.15

An der Tafel lässt sich leicht erkennen, ob eine Gruppe kommutativ ist: eine Gruppe, G , ist genau dann kommutativ, wenn die Gruppentafel symmetrisch ist. Hierbei sollte man darauf achten, dass die *Labels* der Elemente gar keine Rolle spielen. Um dieses Urteil leichter treffen zu können, ersetzen wir die Elemente o. E. durch verschieden gefärbte Quadrate:

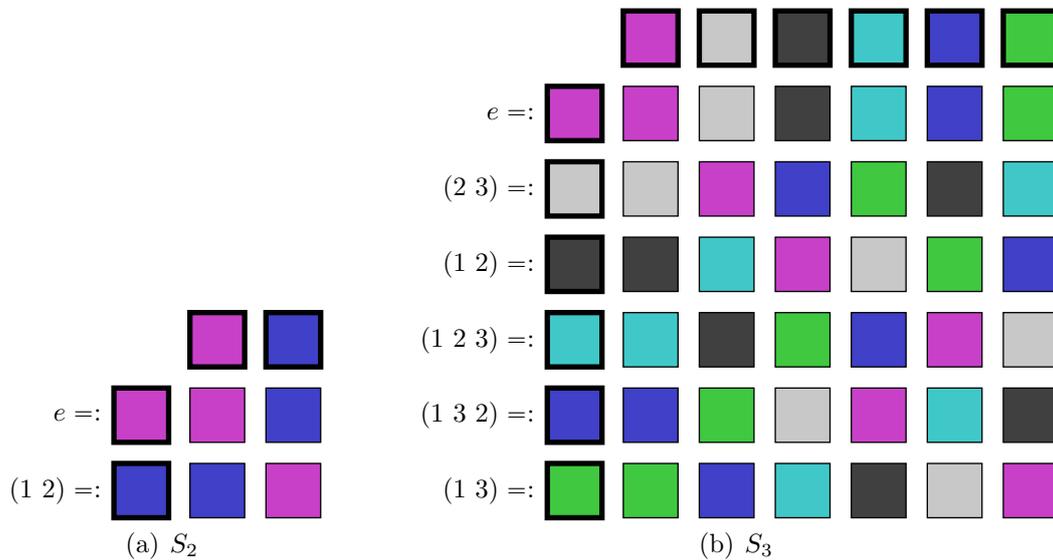


Abbildung 5.1: Gruppentafel mit Elementen durch Farben ersetzt

Nach den o. s. Tafeln ist die erste Gruppe, S_2 , kommutativ und die zweite, S_3 , nicht.

SKA Blatt 6

Woche 6

SKA 6.1

Betrachte die Verknüpfung $(\mathbb{N}, *)$, die vermöge $a * b := a^b$ definiert wird. Wir prüfen das *Assoziativitätsgesetz*. Seien zu diesem Zwecke erstmals $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * b^c = a^{b^c}, \\ (a * b) * c &= a^b * c = (a^b)^c = a^{bc}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Darum

$$\begin{aligned} a * (b * c) = (a * b) * c &\stackrel{(6.1)}{\iff} a^{b^c} = a^{bc} \\ &\iff a = 1 \text{ oder } b^c = bc \\ &\iff a = 1 \text{ oder } b^{c-1} = c. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Diese analytische Untersuchung hilft uns, ein **Gegenbeispiel** zu finden: Seien $a := 2$, $b := 3$, $c := 2$. Dann $a \neq 1$ und $b^{c-1} = 3^1 \neq c$. Darum laut (6.2) gilt $a * (b * c) \neq (a * b) * c$.

Also erfüllt $(\mathbb{N}, *)$ das Assoziativitätsaxiom nicht.

SKA 6.2

Die Multiplikationstabelle für $(R, +, \cdot)$ mit $R = \{0, 1\}$ ist wie folgt

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

SKA 6.3

Betrachte $\{0, 1, a\}$ mit folgenden Operationen $+$, \cdot :

+	0	1	a
0	0	1	a
1	1	a	0
a	a	0	1

·	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	1

Diese Struktur ist offensichtlich isomorph zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ mittels $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $a \mapsto 2$. Da $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Körper ist, ist $(\{0, 1, a\}, +, \cdot)$ ebenfalls wegen des Isomorphismus ein Körper. Insbesondere sind die o. s. definierten Operationen assoziativ.

SKA 6.4

Behauptung. Sei K ein Körper und seien $x, y \in K$ mit $xy = 0$. Dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$. ◇

Beweis. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Darum existieren multiplikative Inverse, $x^{-1}, y^{-1} \in K$. Aus $xy = 0$ folgt dann

$$1 = y^{-1}y = y^{-1}1y = y^{-1}(x^{-1}x)y = (y^{-1}x^{-1})(xy) = (y^{-1}x^{-1})0 = 0.$$

Das ist ein Widerspruch! ■

Bemerkung. Wir haben hier den Satz $\forall a \in K : a \cdot 0 = 0$ (siehe [Sin20, Satz 4.2.2]) in Anspruch genommen.

SKA 6.5

Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ versehen mit Addition und Multiplikation modulo 6.

Beachte: das additive Neutralelement ist die Äquivalenzklasse $[0]$.

Für $x = [2]$ und $y = [3]$ gilt $x, y \neq [0]$ und aber $xy = [2 \cdot 3] = [6] = [0]$.

Bemerkung. Wir nennen solche Elemente *Nullteiler*.

SKA 6.6

(a)
$$z_1 := \frac{2i}{5-3i} = \frac{2i \cdot (5+3i)}{5^2+3^2} = \frac{-6+10i}{34} = -\frac{3}{17} + i\frac{5}{17}$$

$\implies \Re(z_1) = -\frac{3}{17}, \quad \Im(z_1) = \frac{5}{17}.$

$$z_2 := \frac{3-2i}{1+2i} = \frac{(3-2i) \cdot (1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{(3+(-2)(-2)i^2) + (-6+(-2)i)}{5} = \frac{(3-4) + -8i}{5} = -\frac{1}{5} + i\frac{8}{5}$$

$\implies \Re(z_2) = -\frac{1}{5}, \quad \Im(z_2) = \frac{8}{5}.$

(b)

Gaußverfahren angewandt auf $(A|\mathbf{b})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1 & 0 \\ -2 & 2-i & 1 \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformation $Z_1 \leftarrow (1-i) \cdot Z_1$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1-i & 0 \\ -2 & 2-i & 1 \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_1$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1-i & 0 \\ 0 & 3-2i & 1 \end{array} \right)$$

Aus der Stufenform erschließt sich

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3-2i} &= \frac{3+2i}{3^2+2^2} &= \frac{3+2i}{13} \\ x &= \frac{1}{2}(-(1-i)y) &= -\frac{1}{2} \frac{3-i}{13} &= \frac{-3+i}{26}. \end{aligned}$$

SKA 6.7

(a) Es gilt $4 \cdot 7 \equiv -1 \cdot 2 \equiv -2 \equiv 3$ modulo 5.

(b) Es gilt $2^{100031} \equiv (-1)^{\text{ungerade Zahl}} \equiv -1 \equiv 2$ modulo 3.
Es gilt $2^{1000302} \equiv (-1)^{\text{gerade Zahl}} \equiv 1$ modulo 3.

- (c) Für $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist die Menge an Möglichkeiten klein, sodass wir per *brute force* das Inverse von 3 bestimmen können:

n	0	1	2	3	4
$3 \cdot n$	0	3	1	4	2

Darum gilt $3 \cdot 2 \equiv 1$ modulo 5, sodass $3^{-1} = 2$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Für den Fall $\mathbb{Z}/103\mathbb{Z}$ gibt es deutlich mehr Möglichkeiten, sodass es ein Versuch durch rohe Gewalt nicht mehr sinnvoll ist. Darum wenden wir das Lemma von Bézout an und lesen das Resultat daraus.

Zur Erinnerung: Durch den Euklidischen Algorithmus auf $(a := 103, b := 21)$ angewandt erhalten wir ganze Zahlen, $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass $u \cdot 103 + v \cdot 21 = \text{ggT}(103, 21)$ gilt. Da aber $103 \in \mathbb{P}$ und $1 < 21 < 103$, gilt $\text{ggT}(103, 21) = 1$, sodass die o. s. Identität $1 \equiv u \cdot 103 + v \cdot 21 \equiv 0 + v \cdot 21$ modulo 103 liefert, was wiederum bedeutet, dass $21^{-1} = v$ in $\mathbb{Z}/103\mathbb{Z}$.

Zunächst führen wir also den Euklidischen Algorithmus auf $a = 103$ und $b = 21$ aus:

Restberechnung (symbolisch)	Restberechnung (Werte)
$a = b \cdot q_1 + r_1$	$103 = 21 \cdot 4 + 19$
$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$21 = 19 \cdot 1 + 2$
$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$19 = 2 \cdot 9 + \mathbf{1}$
$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$	$2 = 1 \cdot 2 + 0$

Also gilt $\text{ggT}(103, 21) = 1$ wie erwartet. Und jetzt kehren wir die Ausdrücke um, um die Koeffizienten u, v zu bestimmen:

Rest (symbolisch)	Rest (Werte)
$r_1 = a - 4 \cdot b$	$19 = 1 \cdot a + -4 \cdot b$
$r_2 = b - 1 \cdot r_1$	$2 = -1 \cdot a + 5 \cdot b$
$r_3 = r_1 - 9 \cdot r_2$	$\mathbf{1 = 10 \cdot a + -49 \cdot b}$

Darum liefert uns das Bézout Lemma $1 = 10 \cdot a - 49 \cdot b = 10 \cdot 103 - \mathbf{49} \cdot 21$. Also gilt wie oben $21^{-1} = -49 = \mathbf{54}$ in $\mathbb{Z}/103\mathbb{Z}$.

(Man prüft dies: $21 \cdot 54 = 1134 = 103 \cdot 11 + 1 \equiv 1$ modulo 103. Also ist das Ergebnis richtig!)

- (d) Wir führen das Gaußverfahren zuerst in \mathbb{Z} durch, nur achten wir darauf, niemals mit Vielfachen von 11 oder 13 zu multiplizieren:

Gaußverfahren angewandt auf $(A|\mathbf{b})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 10 & 7 & -5 \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftarrow Z_2 - 5 \cdot Z_1$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 22 & -5 \end{array} \right)$$

Wir wenden die Zeilentransformation $Z_1 \leftarrow 7 \cdot Z_1 + Z_2$ an und erhalten das äquivalente System (†):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 1 & -5 \\ 0 & 22 & -5 \end{array} \right)$$

In $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ ist das System ab (†)

LGS modulo 11:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{3} & 1 & \mathbf{6} \\ 0 & 0 & \mathbf{6} \end{array} \right)$$

\implies System unlösbar, da $6 \neq 0$ in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

In $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ist das System ab (†)

LGS modulo 13:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 9 & 8 \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformationen $Z_1 \leftarrow 9 \cdot Z_1 - \cdot Z_2$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 8 \end{array} \right)$$

Daraus ergibt sich die Lösung in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 9^{-1} \cdot -1 = 3 \cdot -1 = \boxed{10} \\ x_2 &= 9^{-1} \cdot 8 = 3 \cdot 8 = \boxed{11}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ die Lösung des LGS in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Also ist das LGS innerhalb $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ lösbar, aber nicht innerhalb $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

SKA 6.8

Satz. Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid m$ ist die Abbildung $M_m : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die vermöge $M_m([x]) = [m] \cdot [x] (= [mx])$ definiert wird, wohldefiniert und injektiv. Insbesondere existiert ein $[x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so dass $[m] \cdot [x] = [1]$. \diamond

Beweis. Dass diese Abbildung wohldefiniert ist, folgt aus der Wohldefiniertheit von Modulmultiplikation.

Injektivität:

Seien $[x], [x'] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Angenommen $M_m([x]) = M_m([x'])$. **Zu zeigen:** $[x] = [x']$.

Aus $M_m([x]) = M_m([x'])$ folgt $[mx] = [mx']$ per Konstruktion der Abbildung M_m .

Per Definition der Äquivalenzklassen gilt somit $mx \equiv mx'$ modulo p .

Daraus folgt $p \mid (mx - mx')$, also $p \mid m \cdot (x - x')$.

Da p prim ist, gilt $p \mid m$ oder $p \mid (x - x')$ (siehe [Sin20, Satz 3.4.14]).

Per Voraussetzung auf m folgt daraus, dass $p \mid (x - x')$.

Daraus folgt $x \equiv x'$ modulo p , und somit $[x] = [x']$ per Definition der Äquivalenzklassen.

Darum ist M_m injektiv.

Da nun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ endlich ist, sind injektive Abbildungen zwischen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und sich selbst automatisch surjektiv.

Per Surjektivität existiert ein Element $[x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so dass $[1] = M_m([x]) = [m] \cdot [x]$.

Das heißt, $[m]$ ist invertierbar innerhalb $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. \blacksquare

Bemerkung. Die letzte Aussage in diesem Satz gilt auch allgemeiner: Sind $n, m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann ist $[m]$ innerhalb $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ invertierbar. Falls n nicht prim ist, muss man sich allerdings bei der Injektivitätsargumentation mehr bemühen. Einfacher ist also natürlich die Anwendung von dem Lemma von Bézout.

TEIL III

Quizzes

Quiz 1

Woche 1

Behauptung. Das LGS

$$\begin{aligned} -x + a \cdot y &= 3 \\ a \cdot x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

ist genau dann lösbar, wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

◇

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir führen das Gaußverfahren aus:

Ursprüngliches LGS $(A_\alpha | b_\beta)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & a & 3 \\ a & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Wende die Zeilentransformationen $Z_2 \leftarrow a \cdot Z_1 + Z_2$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & a^2 - 4 & 3a \end{array} \right)$$

Wenn $a \in \{\pm 2\}$, ist das LGS unlösbar, da in der 2. Zeile links nur 0 Einträge stehen und rechts ± 6 .

Wenn $a \notin \{\pm 2\}$, gibt es zwei Stufen und damit ist das LGS lösbar.

Also gilt die Behauptung. ■

Quiz 2

Woche 2

Sei L die Gerade $\{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(1) **Behauptung.** Der Punkt, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$, liegt in der Geraden, L . ◇

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in L &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \mathbf{v} + t\mathbf{w} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} - \mathbf{v} = t\mathbf{w} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist die letzte Aussage wahr, da der Ausdruck innerhalb des Existenzquantors offensichtlich unter $t = \frac{1}{2}$ wahr ist. Darum gilt $\mathbf{x} \in L$. ■

(2) Fixiere einen Vektor, $\mathbf{w}_\perp \in \mathbb{R}^3$, der zu \mathbf{w} normal ist. Z. B. können wir

$$\mathbf{w}_\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Dann gilt $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_\perp \rangle = 0$, sodass die Vektoren normal zueinander stehen.

Nun, für $\mathbf{x} \in L$ setze

$$L_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{x} + s \cdot \mathbf{w}_\perp \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Dann gilt offensichtlich $\mathbf{x} \in L \cap L_{\mathbf{x}}$.

Andererseits, da die Richtungsvektoren in den Geraden nicht linear abhängig sind, (da sie normal zueinander stehen), gilt $|L \cap L_{\mathbf{x}}| \leq 1$.

Darum gilt $L \cap L_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\}$.

Quiz 3

Woche 3

(a) **Behauptung.** Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Sei $B \subseteq Y$ beliebig. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$. Insbesondere gilt $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ \diamond

Beweis. Für $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(B)) &\iff \exists x \in f^{-1}(B) : f(x) = y \\ &\iff \exists x : (x \in f^{-1}(B) \text{ und } f(x) = y) \\ &\iff \exists x : (x \in X \text{ und } f(x) \in B \text{ und } f(x) = y) \\ &\iff \exists x \in X : (f(x) \in B \text{ und } f(x) = y) \\ &\iff \exists x \in X : (y = f(x) \text{ und } y \in B) \\ &\iff (\exists x \in X : y = f(x)) \text{ und } y \in B \\ &\iff y \in f(X) \text{ und } y \in B \\ &\iff y \in f(X) \cap B. \end{aligned}$$

Darum gilt $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subseteq B$. \blacksquare

(b) Aus (a) folgt:

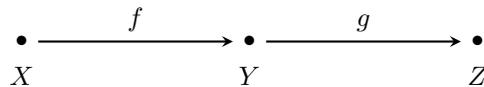
- f surjektiv $\implies f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B = Y \cap B = B$ für alle $B \subseteq Y$;
- f nicht surjektiv $\implies f(f^{-1}(Y)) = f(X) \cap Y = f(X) \subset Y$ (strikt).

Darum ist es notwendig und hinreichend, eine nicht-surjektive Funktion als Beispiel zu nehmen. Hier ein minimales Beispiel $X = \{0\}$ und $Y = \{1, 2\}$ und $B = Y$ und $f : X \rightarrow Y$ definiert durch $f(0) = 1$. Dann $f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(Y)) = f(X) = \{1\} \subset Y$ (strikt).

Quiz 4

Woche 4

Gegeben seien Mengen X, Y, Z , und Funktionen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$. Wir betrachten die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$



(a) **Behauptung.** $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv. ◇

Beweis. Angenommen, $g \circ f$ sei injektiv. **Zu zeigen:** f ist injektiv

Zu zeigen: Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Seien also $x_1, x_2 \in X$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\implies (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\implies x_1 = x_2, \text{ da } g \circ f \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

Also ist f injektiv. ■

(b) **Behauptung.** f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv. ◇

Beweis. Angenommen, f, g seien injektiv. **Zu zeigen:** $g \circ f$ ist injektiv

Zu zeigen: Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Seien also $x_1, x_2 \in X$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\implies f(x_1) = f(x_2), \text{ da } g \text{ injektiv} \\ &\implies x_1 = x_2, \text{ da } f \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

Also ist $g \circ f$ injektiv. ■

Quiz 5

Woche 5

Behauptung. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $n < p \leq 2n$. Dann gilt $p \mid \binom{2n}{n}$. ◇

Beweis. Aus $n < p \leq 2n$, d. h. $p \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$, folgt (i) $p \mid \prod_{i=n+1}^{2n} i$.
Es gilt nun

$$\prod_{i=n+1}^{2n} i = \frac{\prod_{i=1}^{2n} i}{n!} = n! \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = n! \binom{2n}{n}. \quad (5.1)$$

Aus (i) und (5.1) folgt also (ii) $p \mid \binom{2n}{n} \cdot n!$.

Beachte, dass p eine Primzahl ist und $n!, \binom{2n}{n} \in \mathbb{Z}$.

Aus (ii) und [Sin20, Satz 3.4.14] folgt also $p \mid \binom{2n}{n}$ oder $p \mid n!$.

Angenommen, $p \nmid \binom{2n}{n}$.

Dann muss laut des o. s. Arguments $p \mid n! (= \prod_{i=1}^n i)$ gelten.

Eine weitere Anwendung von [Sin20, Satz 3.4.14] liefert, dass $p \mid i_0$ für ein $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Aber dann gilt $1 \leq p \leq i_0 \leq n$. Das widerspricht der Voraussetzung, dass $n < p$.

Darum stimmt die Annahme nicht. Das heißt, $p \mid \binom{2n}{n}$. ■

Quiz 6

Woche 6

1. Seien $n \in \mathbb{N}$. Man bezeichne mit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ die Menge der bzgl. Multiplikation modulo n invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Behauptung. Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ gdw. $\exists u, v \in \mathbb{Z} : ua + vn = 1$ gdw. $\text{ggT}(a, n) = 1$ ◇

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 [a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times &\iff \exists u \in \mathbb{Z} : \overbrace{[u] \cdot [a]}^{[u \cdot a]} = [1] \\
 &\iff \exists u \in \mathbb{Z} : u \cdot a \equiv 1 \pmod{n} \\
 &\iff \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : ua + vn = 1 \\
 &\iff \text{ggT}(a, n) = 1 \quad (\text{wegen des Lemmas von Bézout}).
 \end{aligned}$$

Also gilt $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \iff \exists u, v \in \mathbb{Z} : ua + vn = 1 \iff \text{ggT}(a, n) = 1$. ■

2. **Behauptung.** Sei $n = 9$. Dann gilt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[1], [2], [4], [5], [7], [8]\}$. ◇

Beweis. Da

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{ggT}(a, n = 9)$	9	1	1	3	1	1	3	1	1

gilt der letzten Aufgabe zufolge $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[a] \mid a \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}, \text{ggT}(a, n) = 1\} = \{[1], [2], [4], [5], [7], [8]\}$. ■

Quiz 7

Woche 7

1. **Definition.** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Die Vektoren, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, heißen dann **linear unabhängig**, wenn für alle Skalare, $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$,

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : c_i = 0_K$$

gilt. ◇

2. **Behauptung.** Seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren im Vektorraum \mathbb{F}_5^3 über dem Körper \mathbb{F}_5 . Diese Vektoren sind linear unabhängig. ◇

Beweis. Laut Satz [Sin20, Satz 5.2.4] sind die Vektoren, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, dann linear unabhängig, wenn $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die Trivillösung hat, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen also das homogene System:

Zeilenoperationen $Z_2 \leftarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1$ und $Z_3 \leftarrow Z_3 - 2 \cdot Z_1$ anwenden:^a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeilenoperation $Z_3 \leftarrow 2 \cdot Z_3 - Z_2$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Zeilenstufenform geht hervor, dass es keine freien unbekanntten gibt und insbesondere, dass das homogene System nur die Trivillösung besitzt. Darum sind die Vektoren linear unabhängig. ■

^a Beachte, dass wir im Körper \mathbb{F}_5 d. h. modulo 5 berechnen.

Quiz 8

Woche 8

Behauptung. Sei V ein Vektorraum über Körper K und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ lineare Unterräume. Dann gilt

$$U_1 + U_2 = U_2 \iff U_1 \subseteq U_2.$$

◇

Beweis. (\implies). Angenommen,

$$U_1 + U_2 = U_2. \tag{8.1}$$

Zu zeigen: $U_1 \subseteq U_2$. Da jeder lineare Unterraum den Nullvektor enthält (siehe [Sin20, Lemma 1.4.2]), gilt

$$U_1 = U_1 + \underbrace{\{\mathbf{0}\}}_{\subseteq U_2} \subseteq U_1 + U_2 \stackrel{(8.1)}{=} U_2.$$

(\impliedby). Angenommen, $U_1 \subseteq U_2$. **Zu zeigen:** $U_1 + U_2 = U_2$.

Für Mengengleichheit teilen wir dies in zwei Teile auf:

(\supseteq). **Zu zeigen:** $U_2 \subseteq U_1 + U_2$. Da jeder lineare Unterraum den Nullvektor enthält,

$$U_2 = \underbrace{\{\mathbf{0}\}}_{\subseteq U_1} + U_2 \subseteq U_1 + U_2$$

(\subseteq). **Zu zeigen:** $U_1 + U_2 \subseteq U_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &\subseteq U_2 + U_2, \quad \text{da per Annahme } U_1 \subseteq U_2 \\ &\subseteq U_2, \quad \text{da als Vektorraum } U_2 \text{ unter Addition stabil ist.} \end{aligned}$$

■

Bemerkung. In diesem Beweis haben wir mit mengenweise Operationen gearbeitet. Z. B. aus $\{\mathbf{0}\} \subseteq U_1$ folgt $\{\mathbf{0}\} + U_2 \subseteq U_1 + U_2$; und aus $U_1 \subseteq U_2$ folgt $U_1 + U_2 \subseteq U_2 + U_2$. Diese Implikationen haben nichts mit linearer Algebra zu tun. Sie sind rein mengentheoretische Ergebnisse und lassen sich allgemein folgendermaßen zeigen:

$$A \star B = \{a \star b \mid a \in A, b \in B\} \subseteq \{a \star b \mid a \in A', b \in B\} = A' \star B$$

für alle Mengen, A, A', B mit $A \subseteq A'$ und alle Operationen \star definiert auf $A' \times B$.

Gebrauch machten wir auch von

$$U + \{\mathbf{0}\} = \{u + v \mid u \in U, v \in \{\mathbf{0}\}\} = \{u + \mathbf{0} \mid u \in U\} = \{u \mid u \in U\} = U$$

für alle Teilmengen, $U \subseteq V$, und von

$$U + U = \underbrace{\{u + v \mid u \in U, v \in U\}}_{\subseteq U} \subseteq U$$

für alle linearen Unterräume, $U \subseteq V$.

◇

Quiz 9

Woche 9

Behauptung. Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper, K . Seien $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ linear. Falls

(i) ψ surjektiv ist; und

(ii) $\text{Kern}(\psi) + \text{Bild}(\varphi) = V$,

dann ist $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ surjektiv. ◇

Beweis. Es reicht aus, für alle $z \in W$ zu zeigen, dass ein $x \in U$ existiert mit

$$(\psi \circ \varphi)(x) = z. \quad (9-1)$$

Sei also $z \in W$ beliebig.

Wegen (i) existiert ein $y \in V$, so dass

$$\varphi(y) = z. \quad (9-2)$$

Da $y \in V$ und laut (ii) $V = \text{Kern}(\psi) + \text{Bild}(\varphi)$, es existieren $y_0 \in \text{Kern}(\psi)$ und $y_1 \in \text{Bild}(\varphi)$, so dass

$$y = y_0 + y_1. \quad (9-3)$$

Da $y_1 \in \text{Bild}(\varphi)$, existiert nun ein $x \in U$, so dass $\varphi(x) = y_1$. Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(x) &= \psi(\varphi(x)) \\ &= \psi(y_1) \\ &\stackrel{(9-3)}{=} \psi(y - y_0) \\ &= \psi(y) - \psi(y_0) \\ &= \psi(y) - 0, \quad \text{da } y_0 \in \text{Kern}(\psi) \\ &\stackrel{(9-2)}{=} z. \end{aligned}$$

Damit haben wir (9-1) gezeigt.

Also ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv. ■

Bemerkung. Wir können in der Tat zeigen, dass die umgekehrte Richtung auch gilt: Angenommen, $\psi \circ \varphi$ sei surjektiv. Dann gilt $W \supseteq \psi(V) \supseteq \psi(\varphi(U)) = (\psi \circ \varphi)(U) = W$, und somit $\psi(V) = W$, sodass (i) gilt. Für (ii) brauchen wir nur die \supseteq -Inklusion zu zeigen, da die \subseteq -Inklusion offensichtlich wahr ist. Sei also $y \in V$ beliebig. Wegen Surjektivität von $\psi \circ \varphi$ existiert nun ein $x \in U$, so dass $\psi(y) = (\psi \circ \varphi)(x)$. Beobachte man, dass

$$\psi(y - \varphi(x)) = \psi(y) - \psi(\varphi(x)) = 0,$$

sodass $y - \varphi(x) \in \text{Kern}(\psi)$ gilt. Darum

$$y = \underbrace{y - \varphi(x)}_{\in \text{Kern}(\psi)} + \underbrace{\varphi(x)}_{\in \text{Bild}(\varphi)} \in \text{Kern}(\psi) + \text{Bild}(\varphi).$$

Damit haben wir bewiesen, dass $V \subseteq \text{Kern}(\psi) + \text{Bild}(\varphi)$ (d. h. die \supseteq -Inklusion in (ii)).

Darum gilt: $\psi \circ \varphi$ surjektiv \Rightarrow (i)+(ii) gelten. ◇

Quiz 10

Woche 10

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) **Behauptung.** $\mathcal{A} := (v_1, v_2)$ und $\mathcal{B} := (w_1, w_2)$ sind jeweils Basen von \mathbb{R}^2 . ◇

Beweis. Da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, reicht es aus zu zeigen, dass \mathcal{A} und \mathcal{B} linear unabhängige Systeme sind. Hierfür reicht es aus **zu zeigen**, dass $\text{Rang}(A) = 2$ und $\text{Rang}(B) = 2$, wobei $A := (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := (w_1 \ w_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Zeilenreduktion liefert uns

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{Z_2 \leftarrow 3 \cdot Z_2 - 2 \cdot Z_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ B \xrightarrow{Z_2 \leftarrow 2 \cdot Z_2 + \cdot Z_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Also $\text{Rang}(A) = 2$ und $\text{Rang}(B) = 2$, wie zu zeigen war. ■

(b) Sei $\mathcal{K} := (e_1, e_2)$, die Standardbasis für \mathbb{R}^2 . Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die eindeutige lineare Abbildung, die $\varphi(v_i) = w_i$ für $i \in \{1, 2\}$ erfüllt.^a **Zu bestimmen:** die Matrizendarstellung $M := M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(\varphi)$.

ANSATZ I

Wir versuchen, die Standardbasiselement in Bezug auf \mathcal{A} umzuschreiben, und berechnen die entsprechenden Outputvektoren:

$$\begin{array}{l} e_1 \stackrel{\text{Defn}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2 - v_1 \\ e_2 \stackrel{\text{Defn}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1 - 3v_2 \end{array}$$

Also gilt wegen Linearität

$$\begin{array}{l} \varphi(e_1) = \varphi(2v_2 - v_1) = 2\varphi(v_2) - \varphi(v_1) = 2w_2 - w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_2) = \varphi(2v_1 - 3v_2) = 2\varphi(v_1) - 3\varphi(v_2) = 2w_1 - 3w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \end{pmatrix} \end{array}$$

Da diese Outputvektoren schon in Bezug auf die Standardbasis dargestellt sind, erhalten wir

$$M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(\varphi) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 11 & -17 \end{pmatrix}}.$$

ANSATZ II

In diesem Ansatz bestimmen wir auf systematische Weise notwendige Bedingungen dafür, dass eine Matrix, M , φ darstellt. Per Konstruktion, und da die Vektoren v_1, v_2, w_1, w_2 bzgl. \mathcal{K} dargestellt wurden, muss

$$Mv_i = \varphi(v_i) = w_i$$

für alle $i \in \{1, 2\}$ gelten. Mit anderen Worten muss $MA = B$ gelten, wobei A, B die o. s. definierten Matrizen sind. Also ist eine notwendige Bedingung $M = BA^{-1}$. Darum ist BA^{-1} **zu berechnen**.

Hierfür gibt es mehrere Rechenwege. Wir arbeiten mit $(A^T | B^T)$ und reduzieren, bis in der linken Hälfte die Identitätsmatrix, \mathbf{I} , steht. In der rechten Hälfte steht dann $(A^T)^{-1}B^T$, also $(BA^{-1})^T$. Das Resultat transponiert liefert uns dann BA^{-1} , also M .^b

^aDa \mathcal{A} eine Basis von \mathbb{R}^2 ist, definieren laut [Sin20, Satz 6.1.13] diese Bedingungen eine (eindeutige) lineare Abbildung.

^bWir müssen diesen Umweg gehen, weil das Gaußverfahren uns nur nach linkst multiplizierte Inverse liefern kann und wir schließlich BA^{-1} berechnen wollen, was eine Rechtsmultiplikation durch das Inverse ist.

$$\begin{array}{ccc}
(A^T|B^T) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow{Z_2 \leftarrow 3 \cdot Z_2 - 2 \cdot Z_1} & \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 17 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{Z_1 \leftarrow Z_1 + 2 \cdot Z_2} & \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -6 & 33 \\ 0 & -1 & -4 & 17 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{Z_1 \leftarrow 3^{-1} \cdot Z_1 \quad Z_1 \leftarrow -1 \cdot Z_2} & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & -17 \end{array} \right)
\end{array}$$

Darum gilt notwendigerweise

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 4 & -17 \end{pmatrix}^T = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 11 & -17 \end{pmatrix}},$$

damit M φ darstellt. Da es eine eindeutige Darstellungsmatrix für φ gibt, gilt somit $M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(\varphi) = M$.

Quiz 11

Woche 11

(Siehe Git-Repo → [/notes/brrechnungen_wk12.md](#).)

Literaturverzeichnis

- [Jec97] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, 1997.
- [Sin20] Rainer Sinn. *Lineare Algebra I: Skript zur Veranstaltung Universität Leipzig. Vorlesungsskript*, 2020.
- [Wal16] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.