Lineare Algebra I

Lösungen zu diversen Aufgaben im Kurs

Raj Dahya
Fakultät für Mathematik und Informatik/Institut für Philosophie
Universität Leipzig.
Wintersemester 2020/2021

Vorwort

Dieses Dokument enthält Lösungsansätze zu den Übungsserien, Selbstkontrollenaufgaben, und Quizzes. Diese werden natürlich *nach* Abgabefristen hochgeladen und dienen *nicht* als Musterlösungen! Der Zweck dieser Lösungen ist es vielmehr, Ansätze zu präsentieren, mit denen man seine *eigenen* Versuche vergleichen kann.

Inhaltsverzeichnis

TEIL I

Übungsserien

Übungsserie 1

Woche 1

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 1·1

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge

$$L_{\alpha,\beta} \quad := \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta\}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $m = 3$ und $n = 4$, und $A_\alpha \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b}_\beta \in \mathbb{R}^m$ durch

$$A_\alpha \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 6 & -3 \\ 2 & 14 & \alpha & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_\beta \quad := \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Um die Lösungsmenge zu bestimmen führen wir das Gaußverfahren aus:

Ursprüngliches LGS $(A_\alpha | b_\beta)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 14 & \alpha & -2 & \beta \end{array}\right)$$

Wende die Zeilentransformationen

$$\begin{array}{rcl} Z_2 & \leftsquigarrow & Z_2 - Z_1 \\ Z_3 & \leftsquigarrow & Z_3 - 2 \cdot Z_1 \end{array}$$

an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha - 4} & 0 & \beta - 8 \end{array}\right)$$

Die eingezeichneten Einträge markieren die ersten Einträge der Stufen. Es gibt also 2 oder 3 Stufen, je nachdem, ob $\alpha - 4 = 0$. Dies führt zu einem Fallunterschied:

Fall 1. $\alpha - 4 = 0$. Das heißt, $\alpha = 4$. In diesem Falle hat das augmentierte System genau 2 Stufen und sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 8 \end{array}\right)$$

Dies führt zu zwei weiteren Fällen, denn die 3. Gleichung ist jetzt genau dann lösbar, wenn $\beta - 8 = 0$.

Fall 1a. $\beta - 8 \neq 0$. Das heißt, $\beta \neq 8$. Dann ist die 3. Gleichung und damit das LGS nicht lösbar. Darum erhalten wir $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \emptyset}$.

Fall 1b. $\beta-8=0$. Das heißt, $\beta=8$. Dann ist die 3. Gleichung trivialerweise erfüllt. Das augmentierte System sieht wird zum

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und kann jetzt aufgelöst werden. Wir arbeiten von unten nach oben:

> Aus der ganzen Zeilenstufenform erschließt sich
>
> $$x_3,\ x_4 \text{ sind frei}$$
>
> Aus der Stufenform von Gleichungen 2 und 1 erschließt sich
>
> $$\begin{array}{rcl} x_2 &=& -4-4x_3+2x_4 \\ x_1 &=& 4-7x_2-2x_3+x_4 \\ &=& 4-7(-4-4x_3+2x_4)-2x_3+x_4 \\ &=& 32+26x_3+-13x_4 \end{array}$$
>
> Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Form der Lösung:
>
> $$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} &=& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 32+26x_3+-13x_4 \\ -4-4x_3+2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 32+26x_3+-13x_4 \\ -4-4x_3+2x_4 \\ 0+1x_3+0x_4 \\ 0+0x_3+1x_4 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26x_3 \\ -4x_3 \\ 1x_3 \\ 0x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13x_4 \\ 2x_4 \\ 1x_4 \\ 1x_4 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
>
> mit x_3, x_4 frei wählbar.

Also erhalten wird in diesem Falle $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}}$,

oder etwas kompakter formuliert, $L_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Fall 2. $\alpha-4\neq 0$. Das heißt, $\alpha\neq 4$. In diesem Falle hat das augmentierte System genau 3 Stufen und diesmal ist nur x_4 frei. Man beachte, dass dies im Grunde genau wie Fall 1b ist, nur dass wir zusätzlich Gleichung 3 beachten und x_3 bestimmen müssen.

> Aus der Stufenform von Gleichungen 3 ergibt sich
>
> $$x_3 = \tfrac{\beta-8}{\alpha-4}$$
>
> Der Rest der Lösung des Gleichungssystems verhält sich genau wie im Fall 3b, das heißt
>
> $$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} &=& \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &=& \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\beta-8}{\alpha-4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$
>
> wobei x_4 frei wählbar ist.

Also erhalten wird in diesem Falle $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta-8}{\alpha-4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}}$, oder etwas kompakter formuliert, $L_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta-8}{\alpha-4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Wir fassen die Lösung für alle Fälle zusammen:

$$L_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \emptyset & : \quad \alpha = 4,\ \beta \neq 8 \\ \mathbf{u} + \mathsf{Lin}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} & : \quad \alpha = 4,\ \beta = 8 \\ \mathbf{u} + \frac{\alpha-4}{\beta-8}\mathbf{v} + \mathsf{Lin}\{\mathbf{w}\} & : \quad \alpha \neq 4 \end{cases}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1·2

Satz 1·1 *Angewandt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems verändern die elementaren Zeilenumformungen vom Typ (I), (II) und (III) die Menge der Lösungen nicht.* ◊

Wir beweisen Satz 1·1 mithilfe der folgenden Teilergebnisse.

Lemma 1·2 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ bezeichne mit*

$$(A|\mathbf{b}) \quad \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} \quad (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (I) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile$_i$ und Zeile$_j$ umgetauscht werden, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ◊

Beweis. Betrachte den Fall $i < j$. Es gilt

$\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{cases}$$

da lediglich zwei Aussagen in einer Konjunktion umgetauscht werden

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A'|\mathbf{b})', \text{ da } (A|\mathbf{b}) \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}').$$

Der Fall $i > j$ lässt sich analog zeigen. Falls $i = j$ bleibt das System unverändert, sodass die Behauptung trivialerweise gilt. ■

Lemma 1·3 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bezeichne mit*

$$(A|\mathbf{b}) \quad \overset{II;i,\alpha}{\rightsquigarrow} \quad (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (II) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile$_i$ durch α·Zeile$_i$ ersetzt wird, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ◊

Beweis. Es gilt

$\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i) \\ \cdots & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (\alpha \cdot (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n) & = & \alpha \cdot b_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (\alpha \cdot a_{i,1}x_1 & + & \alpha \cdot a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha \cdot a_{i,n}x_n & = & \alpha \cdot b_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{cases}$$

$\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b})'$, da $(A|\mathbf{b}) \overset{II;i,\alpha}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$.

Also gilt die Behauptung. ■

Lemma 1·4 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne mit*

$$(A|\mathbf{b}) \overset{III;i,j,\alpha}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (III) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile$_i$ durch die Addition von Zeile$_i$ mit α·Zeile$_j$ ersetzt wird, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ◊

Beweis. Es gilt

$\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n + \alpha \cdot b_j & = & b_i + \alpha \cdot b_j) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n \\ & +\alpha \cdot a_{j,1}x_1 & + & \alpha \cdot a_{j,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha \cdot a_{j,n}x_n & = & b_i + \alpha \cdot b_j) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{cases}$$

da laut der j-ten Gleichung gilt $b_j = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k}x_k$

$$\Longrightarrow \begin{cases} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a'_{i,1}x_1 & + & a'_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{i,n}x_n & = & b'_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m), \end{cases}$$

wobei $a'_{i,k} = a_{i,k} + \alpha \cdot a_{j,k}$ für alle k und $b'_i = b_i + \alpha \cdot b_j$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b})'$, da $(A|\mathbf{b}) \overset{III;i,j,\alpha}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$.

Also gilt die Behauptung. ■

Endlich können wir Satz 1·1 beweisen:

Beweis (von Satz 1·1). Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Seien $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$, so dass $(A|\mathbf{b})$ durch eine Transformation der Art (I), (II) oder (III) aus $(A|\mathbf{b})$ entsteht. Das heißt, entweder

$$\begin{array}{rccc} & (A|\mathbf{b}) & \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} & (A'|\mathbf{b}') \\ \text{oder} & (A|\mathbf{b}) & \overset{I;i,\alpha}{\rightsquigarrow} & (A'|\mathbf{b}') \\ \text{oder} & (A|\mathbf{b}) & \overset{III;i,j,\alpha}{\rightsquigarrow} & (A'|\mathbf{b}') \end{array} \tag{1·1}$$

gilt, für ein $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Zu zeigen:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b})\} \quad = \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b})\}. \tag{1·2}$$

Wir zeigen dies in zwei Teile:

(⊆.)
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Element aus der linken Menge, d. h. $\mathbf{x}$ ist eine Lösung zu $(A|\mathbf{b})$. Laut Lemma 1·2 + Lemma 1·3 + Lemma 1·4 und wegen (1·1) erhalten wir, dass $\mathbf{x}$ eine Lösung zu $(A'|\mathbf{b}')$ ist, d. h. $\mathbf{x}$ liegt in der rechten Menge. Also ist die linke Menge in der rechten enthalten.

(⊇.)
Man beachte zuerst, dass sich die Transformation in (1·1) umkehren lässt— und zwar durch Elementartransformationen. Es ist einfach zu sehen, dass entweder

$$\begin{array}{rccc} & (A'|\mathbf{b}') & \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} & (A|\mathbf{b}) \\ \text{oder} & (A'|\mathbf{b}') & \overset{I;i,\alpha^{-1}}{\rightsquigarrow} & (A|\mathbf{b}) \\ \text{oder} & (A'|\mathbf{b}') & \overset{III;i,j,-\alpha}{\rightsquigarrow} & (A|\mathbf{b}). \end{array}$$

Die Situation ist also analog zum ⊆-Teil. Darum gilt die ⊇-Inklusion in (1·2). ■

Aufgabe 1·3

Für diese Aufgabe wird das Konzept der *linearen Unabhängigkeit* aus Kapitel 5 angewandt.

Definition 1·5 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, und $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. Bezeichne mit $(A|\mathbf{b})_I$ die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$, die auf die Zeilen mit Indexes aus I (in bspw. aufsteigender Reihenfolge) reduziert ist. ♢

Beipsiel 1·6 Für $(A|\mathbf{b})$ gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 0 & -7 \\ 4 & -6 & -10 & 6 \\ -2 & -6 & -6 & 9 \\ -7 & 4 & -1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 & -9 \\ -5 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

und $I = \{2, 5, 6\}$ ist $(A|\mathbf{b})_I$ gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -10 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & -9 \\ -5 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right).$$

♢

Mit diesem Mittel können wir nun die Hauptaussage in der Aufgabe formulieren:

Satz 1·7 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Falls $(A|\mathbf{b})$ unlösbar ist, dann existiert $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist.* ♢

Beweis. Es stehen nun die *Zeilen* der Matrix A im Fokus. Wir verwandeln diese in Vektoren, d. h. setze

$$\mathbf{z}^{(i)} \in \mathbb{R}^n \text{ die } i\text{-te Zeile von } A \text{ als Vektor geschrieben}$$

für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Da $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, können wir eine *maximale Menge* $I_0 \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ finden, so dass $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0}$ linear unabhängige Vektoren sind. Aus der Maximalität folgt, dass für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I_0$ $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0 \cup \{k\}}$ *linear abhängig* sind. Wegen der Dimension von $\mathbb{R}^n$ gilt $|I| \leqslant \min\{m, n\} = n$. Aus der linearer Unabhängigkeit von den $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0}$ folgt, dass es (eindeutige) Koeffizienten $c_{k,i} \in \mathbb{R}$ für $i \in I_0$ gibt, so dass

$$\mathbf{z}^{(k)} = \textstyle\sum_{i \in I_0:} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)} \tag{1·3}$$

gilt.

Um nun die Hauptaussage zu zeigen, nehmen wir an, dass $(A|\mathbf{b})$ unlösbar ist. **Zu zeigen:** Es gibt eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Aus dieser Annahme leiten wir folgende Behauptungen ab:

Behauptung 1. Die Verhältnisse zwischen den Zeilenvektoren in (1·3) gelten auch für die Einträge aus $\mathbf{b}$. Das heißt

$$b_k = \textstyle\sum_{i \in I_0:} c_{k,i} b_i \tag{1·4}$$

für alle $k \in \{1, 2, \ldots, m + 1\} \setminus I_0$.

Bew. Sei $k \in \{1, 2, \ldots, m + 1\} \setminus I_0$ beliebig. Da $|I_0| \leqslant n < n + 1$ lässt sich eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ wählen, mit $I \supseteq I_0 \cup \{k\}$ und $|I| = n + 1$. Dann per *Annahme* ist $(A|\mathbf{b})_I$ lösbar. Das heißt, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$b_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \tag{1·5}$$

für alle $i \in I$ gilt. Da $k \in I$ und $I_0 \subseteq I$ und wegen (1·3) erhalten wir nun das Verhältnis

$$\begin{aligned} b_k &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{z}^{(k)})_j x_j \\ &\qquad \text{da die Einträge der } k\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(k)} \text{ entsprechen} \\ &\overset{(1·3)}{=} \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i \in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)})_j x_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_0} c_{k,i} z_j^{(i)} x_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n z_j^{(i)} x_j \\
&= \sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \\
&\qquad \text{da die Einträge der } i\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(i)} \text{ entsprechen} \\
&\overset{(1{\cdot}5)}{=} \sum_{i\in I_0} c_{k,i} b_i.
\end{aligned}$$

Darum gilt die Behauptung. ⊣ **(Beh. 1)**

Behauptung 2. Es gibt eine Lösung zu $(A|\mathbf{b})$.

Bew. Da $|I_0| \leqslant n < n+1$ lässt sich eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ wählen, so dass $I \supseteq I_0$ und $|I| = n + 1$. Dann per *Annahme* ist $(A|\mathbf{b})_I$ lösbar. Das heißt, ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \tag{1·6}$$

für alle $i \in I$ gilt. Da $I \supseteq I_0$ können wir **Behauptung 1** und die Verhältnisse in (1·3) anwenden. Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, m\}\backslash I$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{z}^{(k)})_j x_j \\
&\qquad \text{da die Einträge der } k\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(k)} \text{ entsprechen} \\
&\overset{(1{\cdot}3)}{=} \sum_{j=1}^n (\sum_{i\in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)})_j x_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i\in I_0} c_{k,i} z_j^{(i)} x_j \\
&= \sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n z_j^{(i)} x_j \\
&= \sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \\
&\qquad \text{da die Einträge der } i\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(i)} \text{ entsprechen} \\
&\overset{(1{\cdot}6)}{=} \sum_{i\in I_0} c_{k,i} b_i \\
&\overset{\text{Beh. 1}}{=} b_k
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nicht nur eine Lösung zu Zeile i des LGS, $(A|\mathbf{b})$, für jedes $i \in I$, sondern auch für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, m\}\backslash I$. Das heißt, $\mathbf{x}$ ist eine Lösung des LGS $(A|\mathbf{b})$. Also ist $(A|\mathbf{b})$ lösbar. ⊣ **(Beh. 2)**

Laut **Behauptung 2** ist also $(A|\mathbf{b})$ lösbar. Dies ist aber ein Widerspruch! Darum stimmt die *Annahme* oben nicht. Also gibt es *doch* eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist. Damit wurde die zu zeigende Implikation bewiesen. ■ **(Satz 1·7)**

Bemerkung 1·8 Falls man sich aber auf rudimentäre Mitteln beschränken will, kann man alternativ wie folgt vorgehen. Man wende zuerst das Gaußverfahren an und erhalte somit eine Folge

$$(A^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}) \rightsquigarrow (A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}) \rightsquigarrow (A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$$

wobei $N \in \mathbb{N}$, $A^{(0)} = A$, $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$, $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$ eine erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform ist, und jede der »$\rightsquigarrow$« Übergänge jeweils eine Transformation der Art (I), (II), oder (III) bezeichnet. Da $m > n$ sieht nun die Zeilenstufenform, also $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$, folgendermaßen aus:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
\underbrace{0\,0\ldots0}_{\ell_1} & \gamma_1 & \cdots\cdots & * & \cdots\cdots & \cdots\cdots & * & \cdots\cdots & b_1^{(N)} \\
0\,0\ldots0 & 0 & \underbrace{0\,0\ldots0}_{\ell_2} & \gamma_2 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & * & \cdots\cdots & b_2^{(N)} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
0\,0\ldots0 & 0 & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & \underbrace{0\,0\ldots0}_{\ell_r} & \gamma_r & \cdots\cdots & b_r^{(N)} \\
0\,0\ldots0 & 0 & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & b_{r+1}^{(N)} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
0\,0\ldots0 & 0 & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & b_m^{(N)}
\end{array}\right)$$

wobei $r \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Stufen ist, $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r \in \mathbb{N}_0$, und $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Hauptkoeffizienten der Stufen sind. Es muss nun $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\} = n$ gelten.

Jetzt kann man leicht dafür argumentiere, dass (1) die Zeilenstufenform, $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$, die Implikation erfüllt. Dann aufgrund der Umkehrbarkeit der Elementartransformationen, reicht es aus zu zeigen, dass (2): wenn $(A', \mathbf{b}') \rightsquigarrow (A'', \mathbf{b}'')$ und wenn $(A', \mathbf{b}')$ die Implikation erfüllt, dann erfüllt $(A'', \mathbf{b}'')$ die Implikation. Dies ist nur etwas mühseliger und die Argumentation von (2) führt letzten Endes zu ähnlichen Ideen, die im Beweis oben vorkommen. ♢

Übungsserie 2

Woche 2

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 2·1

Satz 2·1 (vgl. [Sin20, Korollar 1.3.3]). *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ wie $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ und sei*

$$L \quad := \quad \{s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

die Verbindungsgerade zw. $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Dann gilt $\mathbf{0} \in L \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}$. ◊

Beweis. Der Beweis wird in zwei Teilen gezeigt.

($\Longrightarrow$). Angenommen, $\mathbf{0} \in L$. **Zu zeigen:** $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}$.
Per Definition von L existiert ein $s \in \mathbb{R}$, so dass sich $\mathbf{0}$ als $\mathbf{0} = s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w}$ darstellen lässt. Daraus lässt sich ableiten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w} &\iff s\mathbf{v} = (s-1)\mathbf{w} \\
&\iff \underbrace{(s = 0 \text{ und } \mathbf{w} = s(\mathbf{w}-\mathbf{v}) = \mathbf{0})}_{\text{unmöglich, da } \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \text{ per Voraussetzung}} \text{ oder } (s \neq 0 \text{ und } \mathbf{v} = ((s-1)/s)\mathbf{w}) \\
&\iff s \neq 0 \text{ und } \mathbf{v} = ((s-1)/s)\mathbf{w} \\
&\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$). Angenommen, $\mathbf{v} = c\mathbf{w}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. **Zu zeigen:** $\mathbf{0} \in L$.
Per Voraussetzung gilt nun $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, sodass $c = 1$ direkt ausgeschlossen ist.
Setze nun $\boxed{s := \frac{1}{1-c} \in \mathbb{R}}$, was wohldefiniert ist, da $c \neq 1$.
Man berechnet nun

$$\overbrace{s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w}}^{\in L, \text{ per Definition}} \quad = \quad \tfrac{1}{1-c}c\mathbf{w} + (1 - \tfrac{1}{1-c})\mathbf{w} \quad = \quad (\underbrace{\frac{c}{1-c} + 1 - \frac{1}{1-c}}_{=\frac{c-1}{1-c}+1=0})\mathbf{w} \quad = \quad 0\mathbf{w} \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Darum gilt $\mathbf{0} \in L$. ■

Aufgabe 2·2

(a) **Satz 2·2** *Seien* $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^2$ *mit* $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$. *Seien* $L := \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ *und* $L' := \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\}$. *Angenommen,* $L \neq L'$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $L \cap L' = \emptyset$;

(ii) $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ *sind kolinear, d. h.* $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = c\mathbf{w}'$. ◊

Beweis. Der Beweis wird in zwei Teilen gezeigt.

((ai)⟹(aii)). Angenommen, $L \cap L' = \emptyset$. **Zu zeigen:** $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = c\mathbf{w}'$.
Angenommen, dies sei nicht der Fall.
Da $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$ bedeutet dies, dass $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ *linear unabhängig* sind. (→ Warum??)
Also gilt für den Untervektorraum $U := \mathrm{Lin}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$, dass $\dim(U) = 2$.
Da $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Vektorräume sind und $\dim(U) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, folgt hieraus, dass $U = \mathbb{R}^2$. (→ Warum??)
Betrachte bspw. den Vektor

$$\xi \quad := \quad \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2. \tag{2·1}$$

Dann $\xi \in U = \mathrm{Lin}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$. Folglich existieren Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}' = \xi$ gilt.
Setze nun $\boxed{t := \alpha}$ und $\boxed{s := -\beta}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overbrace{\mathbf{v} + t\mathbf{w}}^{\in L} &= (\mathbf{v} + t\mathbf{w}) - (\mathbf{v}' + s\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (t\mathbf{w} - s\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\
&\overset{(2·1)}{=} -\xi + \xi + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \qquad = \quad \underbrace{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}'}_{\in L'}.
\end{aligned}$$

Darum gilt $L \cap L' \neq \emptyset$, was ein Widerspruch ist.
Darum stimmt die o. s. Annahme nicht. Also sind $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ kolinear.

((aii)⟹(ai)). Angenommen, $\mathbf{w} = c\mathbf{w}'$ für ein $c \in \mathbb{R}$. **Zu zeigen:** $L \cap L' = \emptyset$.
Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existiert ein Vektor, $\mathbf{u} \in L \cap L'$.
Per Konstruktion existieren dann $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathbf{v} + t_0\mathbf{w} \quad = \quad \mathbf{u} \quad = \quad \mathbf{v}' + s_0\mathbf{w}'.$$

Aus der Voraussetzung für diese Richtung folgt

$$\mathbf{v}' \quad = \quad \mathbf{v} + (t_0 - s_0c)\mathbf{w} \tag{2·2}$$

Beachte, dass $\boxed{c \neq 0}$, denn sonst würde $\mathbf{w} = c\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ gelten, was ein Widerspruch ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
L' &= \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\} \\
&\overset{(2·2)}{=} \{\mathbf{v} + (t_0 - s_0c)\mathbf{w} + sc\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\mathbf{v} + (t_0 + (s - s_0)c)\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in R\},
\end{aligned} \tag{2·3}$$

wobei $R = \{t_0 + (s - s_0)c \mid s \in \mathbb{R}\} = f(\mathbb{R})$. Also $R = f(\mathbb{R})$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine durch $f(s) = t_0 + (s - s_0)c$ definierte Funktion ist. Da $c \neq 0$, ist es einfach zu sehen, dass f surjektiv ist (in der Tat bijektiv). Darum gilt $R = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Aus (2·3) folgt also $L' = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} = L$, was ein Widerspruch ist.
Darum stimmt die o. s. Annahme nicht. Also gilt $L \cap L' = \emptyset$. ∎

(b) Wir zeigen nun ein minimales Beispiel dafür, dass Satz 2·2 im allgemeinen für andere Vektorräume nicht gilt. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Betrachte die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}' \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}' \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bis auf 2-Dimensionalität erfüllen diese die Voraussetzungen in Satz 2·2. Einerseits wurden $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ so gewählt, dass sie *nicht* kolinear sind. Dennoch schneiden sich die beiden Geraden, L, L', nicht, da $L \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} =: E$ und $L' \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1\} =: E'$ und offensichtlich $E \cap E' = \emptyset$.

Aufgabe 2·3

(a) Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ sei die Gerade $L_\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$L_\gamma \quad = \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = \gamma \cdot (x - 3y - 7)\}.$$

Satz 2·3 *Es gibt exakt einen Punkt in dem Schnitt aus den Geraden,* L_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$. *Es gilt nämlich* $\bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma = \{\xi\}$, *wobei* $\xi = (1,-2)$. $\Diamond$

Beweis. Wir teilen diesen Beweis in zwei Teilen auf:

($\supseteq$). Es reicht aus, für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ **zu zeigen**, dass $\xi \in L_\gamma$.
Fixiere also ein beliebiges $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{array}{rclcl} 2\xi_1 + \xi_2 & = & 2 \cdot 1 + (-2) & = & 0, \qquad\qquad \text{und} \\ \gamma \cdot (\xi_1 - 3\xi_2 - 7) & = & \gamma \cdot (1 - 3(-2) - 7) & = & \gamma \cdot 0 \quad = \quad 0. \end{array}$$

Also $2\xi_1 + \xi_2 = \gamma \cdot (\xi_1 - 3\xi_2 - 7)$. Folglich gilt $\xi \in L_\gamma$ per Konstruktion.

($\subseteq$). Sei $\eta := (x,y) \in \bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma$ beliebig. **Zu zeigen:** $\eta = \xi$.
Zu diesem Zwecke seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ irgendwelche Werte mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Per Wahl gilt $\eta \in L_{\gamma_1} \cap L_{\gamma_2}$. Also

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & \gamma_1 \cdot (x - 3x - 7), \text{ und} \\ 2x + y & = & \gamma_2 \cdot (x - 3x - 7). \end{array}$$

Wir können ganz naiv arbeiten und die Gleichungen subtrahieren. Dies liefert $(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot (x - 3x - 7) = 0$, woraus sich ergibt, dass $x - 3y - 7 = 0$ gelten muss, da $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Eingesetzt in die erste Gleichung oben liefert $2x + y = \gamma \cdot 0 = 0$. Darum muss $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ das LGS $(A|\mathbf{b})$ lösen, wobei

$$A \quad = \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{b} \quad = \quad \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Gaußverfahren angewandt auf $(A|\mathbf{b})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftsquigarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right)$$

Aus der Stufenform erschließt sich

$$\begin{array}{rclcl} y & = & \frac{-14}{7} & = & -2 \\ x & = & 7 + 3 \cdot y & = & 1. \end{array}$$

Also $\eta = (x,y) = (1,-2) = \xi$ für alle $\eta \in \bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma$. Das heißt $\bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma \subseteq \{\xi\}$. $\blacksquare$

(b) **(i)** Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} (-3,2) \in L_\gamma & \iff & 2(-3) + (2) = \gamma \cdot ((-3) - 3(2) - 7) \\ & \iff & \gamma = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}. \end{array}$$

Also ist $\boxed{\gamma = \frac{1}{4}}$ der eindeutige Parameter, für den $(-3,2) \in L_\gamma$ gilt.

(ii) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Man beobachte, dass

$$\begin{array}{rcl} L_\gamma & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2-\gamma)x + (1+3\gamma)y = -7\gamma\} \\ & = & \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + (1+3\cdot 2)y = -7 \cdot 2\} & : \ \gamma = 2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2 - \frac{-1}{3})x + 0y = -7 \cdot \frac{-1}{3}\} & : \ \gamma = -\frac{1}{3} \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2-\gamma)x + (1+3\gamma)y = -7\gamma\} & : \ \text{sonst} \end{cases} \\ & = & \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\} & : \ \gamma = 2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\} & : \ \gamma = -\frac{1}{3} \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\gamma-2}{1+3\gamma}x - \frac{7\gamma}{1+3\gamma}\} & : \ \text{sonst} \end{cases}. \end{array}$$

Daraus folgt, dass L_γ

- parallel zur x-Achse für $\gamma = 2$ ist,
- parallel zur y-Achse für $\gamma = -\frac{1}{3}$ ist,
- und ansonsten weder zur x- noch y-Achse parallel ist, da in diesem Falle L_γ die Gerade »$y = ax + b$« ist, wobei $a \neq 0$.

Also ist der gesuchte Parameterwert eindeutig $\boxed{\gamma = -\frac{1}{3}}$.

(iii) Die Gerade »$x - 2y = -1$« lässt sich äquivalent als »$y = \frac{1}{2}x + 1$ darstellen. Darum wird ein Wert $\gamma \in \mathbb{R}$ gesucht, so dass die Gerade L_γ weder zur x- noch y-Achse parallel ist, und die die y-x-Steigung $\frac{1}{2}$ hat. Nach der o. s. Berechnung in (ii) kommt dies nur für den 3. Fall in Frage. Darum gilt

$$\begin{array}{rcl} L_\gamma \text{ parallel zur Gerade »}x - 2y = -1\text{«} & \iff & \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } \frac{\gamma-2}{1+3\gamma} = \frac{1}{2} \\ & \iff & \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } (\gamma - 2) = \frac{1}{2}(1+3\gamma) \\ & \iff & \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } \gamma = -5 \\ & \iff & \gamma = -5. \end{array}$$

Also ist der gesuchte Parameterwert eindeutig $\boxed{\gamma = -5}$.

Übungsserie 3

Woche 3

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 3·1

Wir arbeiten im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu berechnen: $U := \mathrm{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap \mathrm{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ als Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
Zu diesem Zwecke betrachte einen beliebigen Vektor, $\xi \in \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\begin{aligned} \xi \in U &\iff \exists t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R} : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } \xi = t_3\mathbf{w}_1 + t_4\mathbf{w}_2 \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 = t_3\mathbf{w}_1 + t_4\mathbf{w}_2 \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 - t_3\mathbf{w}_1 - t_4\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{w}_1 + t_4\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \\ &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } A\mathbf{t} = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3·1}$$

wobei

$$A := (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Darum ist es notwendig und hinreichend, die *homogenen Lösungen* für A zu finden, und daraus die Parameter abzulesen.

Homogenes Problem für A:
Zeilentransformationen $Z_2 \leftsquigarrow Z_2 - 3 \cdot Z_1$, $Z_3 \leftsquigarrow Z_3 - Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftsquigarrow Z_2 - Z_3$ an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Zeilenstufenform erschließt sich, dass t_4 frei ist. Also $t_4 = \alpha$ für ein frei wählbares $\alpha \in \mathbb{R}$.
Aus der Stufenform von Gleichungen $3, 2, 1$ erschließt sich

$$\begin{aligned} t_3 &= \tfrac{1}{7}t_4 = \tfrac{1}{7}\alpha \\ t_2 &= \tfrac{8}{11}t_3 = \tfrac{8}{77}\alpha \\ t_1 &= 2t_2 - 4t_3 = \tfrac{16}{77}\alpha - \tfrac{4}{7}\alpha = -\tfrac{28}{77}\alpha \end{aligned}$$

Man kann o. E. α durch $\beta := -77\alpha$ ersetzen. Also ist die homogene Lösung gegeben durch

$$\mathbf{t} = \beta \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Wir können nun (3·1) fortsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
\xi \in U &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } A\mathbf{t} = \mathbf{0} \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } \exists \beta \in \mathbb{R} : \mathbf{t} = \beta \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists \beta \in \mathbb{R} : \xi = \beta \cdot (\underbrace{28\mathbf{v}_1 + -8\mathbf{v}_2}_{=:\mathbf{u}}) \\
&\iff \xi \in \mathsf{Lin}\{\mathbf{u}\}
\end{aligned}
\tag{3·2}
$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$.
Es gilt

$$
\mathbf{u} \quad = \quad 28\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 44 \\ 44 \\ 44 \end{pmatrix} \quad = \quad 44\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Aus (3·2) ergibt sich der zu berechnende Untervektorraum als

$$
\mathsf{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap \mathsf{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} \quad = \quad U \quad = \quad \mathsf{Lin}\{\mathbf{u}\} \quad = \quad \mathsf{Lin}\{44\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad = \quad \mathsf{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.
$$

Aufgabe 3·2

Seien X, Y nicht leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *ist* $\boxed{\text{\underline{nicht} allgemein gültig}}$. $\lozenge$

Beweis. Betrachte das Beispiel $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, und $f : X \to Y$ mit $f(x) = 2$ für alle $x \in X$. Für $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ gilt $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, während $f(A) \cap f(B) = \{2\} \cap \{2\} = \{2\}$. Also $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Darum ist dies ein Gegenbeispiel zur Aussage. ■

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich genau dann wahr, wenn f injektiv ist.

(b) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq X : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *ist* $\boxed{\text{allgemein gültig}}$. $\lozenge$

Für manche (doppelte) Implikationen hier, nämlich für den Umgang mit Existenzquantoren, braucht man Grundkenntnisse in Prädikatenlogik 1. Stufe. Hierfüg gibt es zahlreiche Einführungswerke in die mathematische Logik, bspw. [EFT18].

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$ für alle $y \in Y$ gilt.
Sei also $y \in Y$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B : y = f(x) \\
&\iff \exists x \in X : x \in A \cup B \,\text{und}\, y = f(x) \\
&\iff \exists x \in X : (x \in A \,\text{oder}\, x \in B) \,\text{und}\, y = f(x) \\
&\iff \exists x \in X : \big((x \in A \,\text{und}\, y = f(x)) \,\text{oder}\, (x \in B \,\text{und}\, y = f(x))\big) \\
&\iff \exists x \in X : (x \in A \,\text{und}\, y = f(x)) \,\text{oder}\, \exists x \in X : (x \in B \,\text{und}\, y = f(x)) \\
&\iff \exists x \in A : y = f(x) \,\text{oder}\, \exists x \in B : y = f(x) \\
&\iff y \in f(A) \,\text{oder}\, y \in f(B) \\
&\iff y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

Darum gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$. ■

(c) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A \subseteq X : f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$ *ist* $\boxed{\text{\underline{nicht} allgemein gültig}}$. $\lozenge$

Beweis. Betrachte das Beispiel $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, und $f : X \to Y$ mit $f(x) = 2$ für alle $x \in X$. Für $A = \{0\}$ gilt $f(X \backslash A) = f(\{1\}) = \{2\}$, während $Y \cap f(A) = \{2\} \backslash \{2\} = \emptyset$. Also $f(X \backslash A) \neq Y \cap f(A)$. Darum ist dies ein Gegenbeispiel zur Aussage. ■

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich genau dann wahr, wenn f bijektiv ist. Und eine leicht modifizierte Aussage, $\forall A \subseteq X : f(X \backslash A) = f(X) \cap f(A)$, ist genau dann wahr, wenn f injektiv ist.

(d) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq Y : f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ *ist* $\boxed{\text{allgemein gültig}}$. $\lozenge$

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $x \in X$ gilt.
Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\
&\iff f(x) \in A \,\text{und}\, f(x) \in B \\
&\iff x \in f^{-1}(A) \,\text{und}\, x \in f^{-1}(B) \\
&\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).
\end{aligned}$$

Darum gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$. ■

(e) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq Y : f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ *ist* $\boxed{\text{allgemein gültig}}$. $\lozenge$

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $x \in X$ gilt.

Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ oder } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ oder } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Darum gilt $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$. ■

Aufgabe 3.3

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = x + v$ definiert.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{bijektiv}}$. ◊

Beweis. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $g(x) = x - v$ definiert. Es ist einfach zu sehen, dass $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Per Definition ist als f eine Bijektion mit Inversem g. ■

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Sei Y die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^n$. Sei $f : X \to Y$ durch $f(v, w) = \{v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$ definiert.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{surjektiv}}$ *aber* $\boxed{\textit{nicht injektiv}}$. ◊

Beweis. **Surjektivität**
Idee: Folgt aus der Definition von Geraden durch Parameter.
Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Gerade. **Zu zeigen:** $L \in f(X)$.
Nun, *per Definition* einer Geraden existieren $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq \mathbf{0}$ und so dass $L = \{u + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Offensichtlich gilt $(v, w) \in X$. Darum gilt $L = f((v, w)) \in f(X)$.

Nichtinjektivität
Idee: Wir wissen, dass verschiedene aber parallele Vektoren dieselbe Gerade definieren.
Fixiere beliebiges $v, w \in \mathbb{R}^n$ und wähle ein $c \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$.
Dann sind $w, cw \neq \mathbf{0}$ verschiedene aber parallele Vektoren.
Darum gilt $f((v, w)) = \{v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\} = \{v + tc \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\} = f((v, cw))$.
Da $(v, w) \neq (v, cw)$, ist f somit nicht injektiv. ■

(c) Es sei X die Menge aller Bücher in einem fixierten Kontext. Sei Y die Menge alle Autor(inn)en von Büchern. Sei $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ definiert durch $f(x) = \{y \mid y \text{ ein(e) Autor(in) vom Buch } x\}$ für alle $x \in X$.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{nicht im Allgemeinen injektiv}}$ *und* $\boxed{\textit{niemals surjektiv}}$. ◊

Beweis. **Nichtsurjektivität**
Zu zeigen: Es gibt konstellationen von Autor(inn)en, die kein gemeinsames Buch verfasst haben.
Es gibt *immer* eine(n) Autor(in) eines Buchs, sodass $\emptyset \notin f(X)$ in allen Kontexten. Darum ist f niemals surjektiv.

Nichtinjektivität
Zu zeigen: Es gibt zwei verschiedene Bücher, die von der gleichen Konstellation an Autor(inn)en verfasst wurden. In unserem Kontext hat bspw. a = *JK Rowling* alleine die Bücher $b_1 :=$ »*HP and the Philosopher's Stone*« und $b_2 :=$ »*HP and the Goblet of Fire*« geschrieben. Darum $b_1 \neq b_2$ und $f(b_1) = \{a\} = f(b_2)$. Also ist f in unserem Kontext nicht injektiv. ■

Anmerkung. Falls wir $\emptyset$ von der Bildmenge $\mathcal{P}(Y)$ exludieren, dann können wir mindestens dafür argumentieren, dass f $\boxed{\text{nicht im Allgemeinen surjektiv}}$ ist: In unserem konkreten Kontext haben bspw. *JK Rowling* und *Oscar Wilde* nie am selben Buch gearbeitet, also gilt $\{\text{JK Rowling, Oscar Wilde}\} \notin f(X)$. In der Tat ist ein Kontext kaum vorstellbar, in dem sich *alle* Autor(inn)en an einem gemeinsamen Buch beteiligt haben, d. h. $Y \in f(X)$ sowie alle „große" Teilmengen sind fast immer ausgeschlossen.

(d) Seien X die Menge aller in Deutschland zugelassener Kfz und Y die Menge aller amtlicher Kennzeichen. Sei $f : X \to Y$ die Abbildung, die jedem Kfz sein Kennzeichen zuordnet.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{injektiv}}$ *aber* $\boxed{\textit{nicht im Allgemeinen surjektiv}}$. ◊

Beweis. **Injektivität:** Jedes Kennzeichen darf per Gesetz nur einem Kfz zugehören. **Nichtsurjektivität:** Es besteht zwar die Chance, dass irgendwann alle Kennzeichen aufgebraucht werden, aber in der Praxis ist die Menge Y sehr groß, dass dies aktuell und für eine lange Zeit nicht vorkommt. ■

TEIL II

Selbstkontrollenaufgaben

SKA Blatt 4

Woche 4

SKA 4·1

Seien X, Y nicht leere Mengen. Einer Abbildung, $f : X \to Y$, können wir eindeutig die Relation $\mathrm{Gph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$ zuordnen. Dies nennt sich der **Graph von** f (siehe [Sin20, §2.3]—dort wird dies mit Γ_f bezeichnet). Hier ist $\mathrm{Gph}(f)$ also eine Relation auf $X \times Y$. In der Tat *setzen* manche Werke Funktionen mit ihrem Graphen gleich (siehe bspw. [Jec97, S.11]), aber dies ist streng genommen nicht die ganze Wahrheit.

SKA 4·2

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·3

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·4

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·5

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·6

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·7

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·8

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·9

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·10

(*Unter Arbeit*)

SKA 4·11

(*Unter Arbeit*)

TEIL III
Quizzes

Quiz 1

Woche 1

Behauptung. *Das LGS*

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & a \cdot y & = & 3 \\ a \cdot x & - & 4y & = & 0 \end{array}$$

ist genau dann lösbar, wenn $a \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 2\}$. $\Diamond$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir führen das Gaußverfahren aus:

Ursprüngliches LGS $(A_\alpha | b_\beta)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & a & 3 \\ a & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Wende die Zeilentransformationen $Z_2 \leftsquigarrow a \cdot Z_1 + Z_2$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & a^2 - 4 & 3a \end{array}\right)$$

Wenn $a \in \{\pm 2\}$, ist das LGS unlösbar, da in der 2. Zeile links nur 0 Einträge stehen und rechts ± 6.
Wenn $a \notin \{\pm 2\}$, gibt es zwei Stufen und damit ist das LGS lösbar.
Also gilt die Behauptung. $\blacksquare$

Quiz 2

Woche 2

Sei L die Gerade $\{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei

$$\mathbf{v} \quad = \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(1) Behauptung. *Der Punkt,* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$, *liegt in der Geraden,* L. ◊

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in L &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \mathbf{v} + t\mathbf{w} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} - \mathbf{v} = t\mathbf{w} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist die letzte Aussage wahr, da der Ausdruck innerhalb des Existenzquantors offensichtlich unter $t = \frac{1}{2}$ wahr ist. Darum gilt $\mathbf{x} \in L$. ■

(2) Fixiere einen Vektor, $\mathbf{w}_\perp \in \mathbb{R}^3$, der zu $\mathbf{w}$ normal ist. Z. B. können wir

$$\mathbf{w}_\perp \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Dann gilt $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_\perp \rangle = 0$, sodass die Vektoren normal zueinander stehen.

Nun, für $\mathbf{x} \in L$ setze

$$L_\mathbf{x} \quad := \quad \{\mathbf{x} + s \cdot \mathbf{w}_\perp \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Dann gilt offensichtlich $\mathbf{x} \in L \cap L_\mathbf{x}$.
Andererseits, da die Richtungsvektoren in den Geraden nicht linear abhängig sind, (da sie normal zueinander stehen), gilt $|L \cap L_\mathbf{x}| \leqslant 1$.
Darum gilt $L \cap L_\mathbf{x} = \{\mathbf{x}\}$.

Quiz 3

Woche 3

(a) Behauptung. *Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Sei $B \subseteq Y$ beliebig. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$. Insbesondere gilt $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$* ◊

Beweis. Für $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned}
y \in f(f^{-1}(B)) &\iff \exists x \in f^{-1}(B) : f(x) = y \\
&\iff \exists x \in X : (x \in f^{-1}(B) \text{ und } f(x) = y) \\
&\iff \exists x \in X : (f(x) = y \text{ und } x \in f^{-1}(B)) \\
&\iff \exists x \in X : (y = f(x) \text{ und } f(x) \in B) \\
&\iff \exists x \in X : (y = f(x) \text{ und } y \in B) \\
&\iff (\exists x \in X : y = f(x)) \text{ und } y \in B \\
&\iff y \in f(X) \text{ und } y \in B \\
&\iff y \in f(X) \cap B.
\end{aligned}$$

Darum gilt $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subseteq B$. ■

(b) Aus (a) folgt:

- f surjektiv $\Longrightarrow f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B = Y \cap B = B$ für alle $B \subseteq Y$;
- f nicht surjektiv $\Longrightarrow f(f^{-1}(Y)) = f(X) \cap Y = f(X) \subset Y$ (strikt).

Darum ist es notwendig und hinreichend, eine nicht-surjektive Funktion als Beispiel zu nehmen. Hier ein minimales Beispiel $X = \{0\}$ und $Y = \{1, 2\}$ und $B = Y$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(0) = 1$. Dann $f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(Y)) = f(X) = \{1\} \subset Y$ (strikt).

Literaturverzeichnis

[EFT18] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. 2018.

[Jec97] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, 1997.

[Sin20] Rainer Sinn. Lineare Algebra I: Skript zur Veranstaltung Universität Leipzig. Vorlesungsskript, 2020.

[Wal16] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.