Lineare Algebra I

⊛ — ⊛

Lösungen zu diversen Aufgaben im Kurs

Raj Dahya
Fakultät für Mathematik und Informatik/Institut für Philosophie
Universität Leipzig.
Wintersemester 2020/2021

Vorwort

Dieses Dokument enthält Lösungsansätze zu den Übungsserien, Selbstkontrollenaufgaben, und Quizzes. Diese werden natürlich *nach* Abgabefristen hochgeladen und dienen *nicht* als Musterlösungen! Der Zweck dieser Lösungen ist es vielmehr, Ansätze zu präsentieren, mit denen man seine *eigenen* Versuche vergleichen kann.

Inhaltsverzeichnis

TEIL I

Übungsserien

Übungsserie 1

Woche 1

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 1·1

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge

$$L_{\alpha,\beta} \quad := \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\beta\}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $m = 3$ und $n = 4$, und $A_\alpha \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b}_\beta \in \mathbb{R}^m$ durch

$$A_\alpha \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 6 & -3 \\ 2 & 14 & \alpha & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_\beta \quad := \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Um die Lösungsmenge zu bestimmen führen wir das Gaußverfahren aus:

Ursprüngliches LGS $(A_\alpha | b_\beta)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 14 & \alpha & -2 & \beta \end{array}\right)$$

Wende die Zeilentransformationen

$$\begin{array}{lcl} Z_2 & \leftsquigarrow & Z_2 - Z_1 \\ Z_3 & \leftsquigarrow & Z_3 - 2 \cdot Z_1 \end{array}$$

an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha - 4} & 0 & \beta - 8 \end{array}\right)$$

Die eingezeichneten Einträge markieren die ersten Einträge der Stufen. Es gibt also 2 oder 3 Stufen, je nachdem, ob $\alpha - 4 = 0$. Dies führt zu einem Fallunterschied:

Fall 1. $\alpha - 4 = 0$. Das heißt, $\alpha = 4$. In diesem Falle hat das augmentierte System genau 2 Stufen und sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 8 \end{array}\right)$$

Dies führt zu zwei weiteren Fällen, denn die 3. Gleichung ist jetzt genau dann lösbar, wenn $\beta - 8 = 0$.

Fall 1a. $\beta - 8 \neq 0$. Das heißt, $\beta \neq 8$. Dann ist die 3. Gleichung und damit das LGS nicht lösbar. Darum erhalten wir $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \emptyset}$.

Fall 1b. $\beta - 8 = 0$. Das heißt, $\beta = 8$. Dann ist die 3. Gleichung trivialerweise erfüllt. Das augmentierte System sieht wird zum

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und kann jetzt aufgelöst werden. Wir arbeiten von unten nach oben:

Aus der ganzen Zeilenstufenform erschließt sich

$$x_3,\ x_4 \text{ sind frei}$$

Aus der Stufenform von Gleichungen 2 und 1 erschließt sich

$$\begin{aligned} x_2 &= -4 - 4x_3 + 2x_4 \\ x_1 &= 4 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 \\ &= 4 - 7(-4 - 4x_3 + 2x_4) - 2x_3 + x_4 \\ &= 32 + 26x_3 + -13x_4 \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir die allgemeine Form der Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32+26x_3+-13x_4 \\ -4-4x_3+2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32+26x_3+-13x_4 \\ -4-4x_3+2x_4 \\ 0+1x_3+0x_4 \\ 0+0x_3+1x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26x_3 \\ -4x_3 \\ 1x_3 \\ 0x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13x_4 \\ 2x_4 \\ 1x_4 \\ 1x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit x_3, x_4 frei wählbar.

Also erhalten wird in diesem Falle $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}}$, oder etwas kompakter formuliert, $L_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Fall 2. $\alpha - 4 \neq 0$. Das heißt, $\alpha \neq 4$. In diesem Falle hat das augmentierte System genau 3 Stufen und diesmal ist nur x_4 frei. Man beachte, dass dies im Grunde genau wie Fall 1b ist, nur dass wir zusätzlich Gleichung 3 beachten und x_3 bestimmen müssen.

Aus der Stufenform von Gleichungen 3 ergibt sich

$$x_3 = \tfrac{\beta-8}{\alpha-4}$$

Der Rest der Lösung des Gleichungssystems verhält sich genau wie im Fall 3b, das heißt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\beta-8}{\alpha-4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei x_4 frei wählbar ist.

Also erhalten wird in diesem Falle $\boxed{L_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\beta-8}{\alpha-4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}}$, oder etwas kompakter formuliert, $L_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{\beta-8}{\alpha-4} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Wir fassen die Lösung für alle Fälle zusammen:

$$L_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \emptyset & : \alpha = 4,\ \beta \neq 8 \\ \mathbf{u} + \mathrm{Lin}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} & : \alpha = 4,\ \beta = 8 \\ \mathbf{u} + \frac{\alpha-4}{\beta-8}\mathbf{v} + \mathrm{Lin}\{\mathbf{w}\} & : \alpha \neq 4 \end{cases}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 32 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1·2

Satz 1·1 *Angewandt auf die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems verändern die elementaren Zeilenumformungen vom Typ (I), (II) und (III) die Menge der Lösungen nicht.* ♢

Wir beweisen Satz 1·1 mithilfe der folgenden Teilergebnisse.

Lemma 1·2 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ bezeichne mit*

$$(A|\mathbf{b}) \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (I) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile$_i$ und Zeile$_j$ umgetauscht werden, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ♢

Beweis. Betrachte den Fall $i < j$. Es gilt

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b}) \\ \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcccccccc} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{j,1}x_1 & + & a_{j,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{j,n}x_n & = & b_j) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array} \right. \\ \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcccccccc} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{j,1}x_1 & + & a_{j,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{j,n}x_n & = & b_j) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array} \right. \\ & \text{da lediglich zwei Aussagen in einer Konjunktion umgetauscht werden} \\ \Longrightarrow & \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A'|\mathbf{b})', \text{ da } (A|\mathbf{b}) \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}'). \end{array}$$

Der Fall $i > j$ lässt sich analog zeigen. Falls $i = j$ bleibt das System unverändert, sodass die Behauptung trivialerweise gilt. ■

Lemma 1·3 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bezeichne mit*

$$(A|\mathbf{b}) \overset{II;i,\alpha}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (II) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile$_i$ durch α·Zeile$_i$ ersetzt wird, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ♢

Beweis. Es gilt

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b}) \\ \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcccccccc} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i) \\ \cdots \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcccrcl} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (\alpha \cdot (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n) & = & \alpha \cdot b_i) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcccrcl} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (\alpha \cdot a_{i,1}x_1 & + & \alpha \cdot a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha \cdot a_{i,n}x_n & = & \alpha \cdot b_i) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array}\right.$$

$\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b})'$, da $(A|\mathbf{b}) \overset{II;i,\alpha}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$.

Also gilt die Behauptung. ■

Lemma 1·4 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Für $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne mit*

$$(A|\mathbf{b}) \quad \overset{III;i,j,\alpha}{\rightsquigarrow} \quad (A'|\mathbf{b}')$$

die Anwendung von Zeilentransformation (III) auf $(A|\mathbf{b})$, wobei Zeile$_i$ durch die Addition von Zeile$_i$ mit $\alpha\cdot$Zeile$_j$ ersetzt wird, was in $(A'|\mathbf{b}')$ resultiert. Dann für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, falls $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$ ist, dann ist $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b}')$. ♢

Beweis. Es gilt

$\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A|\mathbf{b})$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcccrcl} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcccrcl} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n + \alpha \cdot b_j & = & b_i + \alpha \cdot b_j) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcccrcl} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & & \\ & +\alpha \cdot a_{j,1}x_1 & + & \alpha \cdot a_{j,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha \cdot a_{j,n}x_n & = & b_i + \alpha \cdot b_j) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m) \end{array}\right.$$

da laut der j-ten Gleichung gilt $b_j = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k}x_k$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcccrcl} & (a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1) \\ \text{und} & (a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a'_{i,1}x_1 & + & a'_{i,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{i,n}x_n & = & b'_i) \\ \cdots & & & & & & & & & \\ \text{und} & (a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m), \end{array}\right.$$

wobei $a'_{i,k} = a_{i,k} + \alpha \cdot a_{j,k}$ für alle k und $b'_i = b_i + \alpha \cdot b_j$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{x}$ eine Lösung für $(A'|\mathbf{b})'$, da $(A|\mathbf{b}) \overset{III;i,j,\alpha}{\rightsquigarrow} (A'|\mathbf{b}')$.

Also gilt die Behauptung. ■

Endlich können wir Satz 1·1 beweisen:

Beweis (von Satz 1·1). Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Seien $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$, so dass $(A|\mathbf{b})$ durch eine Transformation der Art (I), (II) oder (III) aus $(A|\mathbf{b})$ entsteht. Das heißt, entweder

$$\begin{array}{rccc} & (A|\mathbf{b}) & \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} & (A'|\mathbf{b}') \\ \text{oder} & (A|\mathbf{b}) & \overset{I;i,\alpha}{\rightsquigarrow} & (A'|\mathbf{b}') \\ \text{oder} & (A|\mathbf{b}) & \overset{III;i,j,\alpha}{\rightsquigarrow} & (A'|\mathbf{b}') \end{array} \tag{1·1}$$

gilt, für ein $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Zu zeigen:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b})\} \quad = \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ eine Lösung für } (A|\mathbf{b})\}. \tag{1·2}$$

Wir zeigen dies in zwei Teile:

<u>**(⊆.)**</u>
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Element aus der linken Menge, d. h. $\mathbf{x}$ ist eine Lösung zu $(A|\mathbf{b})$. Laut Lemma 1·2 + Lemma 1·3 + Lemma 1·4 und wegen (1·1) erhalten wir, dass $\mathbf{x}$ eine Lösung zu $(A'|\mathbf{b}')$ ist, d. h. $\mathbf{x}$ liegt in der rechten Menge. Also ist die linke Menge in der rechten enthalten.

<u>**(⊇.)**</u>
Man beachte zuerst, dass sich die Transformation in (1·1) umkehren lässt— und zwar durch Elementartransformationen. Es ist einfach zu sehen, dass entweder

$$\begin{array}{rccc} & (A'|\mathbf{b}') & \overset{I;i,j}{\rightsquigarrow} & (A|\mathbf{b}) \\ \text{oder} & (A'|\mathbf{b}') & \overset{I;i,\alpha^{-1}}{\rightsquigarrow} & (A|\mathbf{b}) \\ \text{oder} & (A'|\mathbf{b}') & \overset{III;i,j,-\alpha}{\rightsquigarrow} & (A|\mathbf{b}). \end{array}$$

Die Situation ist also analog zum ⊆-Teil. Darum gilt die ⊇-Inklusion in (1·2). ■

Aufgabe 1·3

Für diese Aufgabe wird das Konzept der *linearen Unabhängigkeit* aus Kapitel 5 angewandt.

Definition 1·5 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, und $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. Bezeichne mit $(A|\mathbf{b})_I$ die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$, die auf die Zeilen mit Indexes aus I (in bspw. aufsteigender Reihenfolge) reduziert ist. ◊

Beipsiel 1·6 Für $(A|\mathbf{b})$ gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 0 & -7 \\ 4 & -6 & -10 & 6 \\ -2 & -6 & -6 & 9 \\ -7 & 4 & -1 & -5 \\ 4 & -5 & 2 & -9 \\ -5 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right)$$

und $I = \{2, 5, 6\}$ ist $(A|\mathbf{b})_I$ gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -10 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & -9 \\ -5 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right).$$

◊

Mit diesem Mittel können wir nun die Hauptaussage in der Aufgabe formulieren:

Satz 1·7 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ und seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Falls $(A|\mathbf{b})$ unlösbar ist, dann existiert $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist.* ◊

Beweis. Es stehen nun die *Zeilen* der Matrix A im Fokus. Wir verwandeln diese in Vektoren, d. h. setze

$$\mathbf{z}^{(i)} \in \mathbb{R}^n \text{ die } i\text{-te Zeile von } A \text{ als Vektor geschrieben}$$

für $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Da $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \ldots, \mathbf{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, können wir eine *maximale Menge* $I_0 \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ finden, so dass $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0}$ aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Wegen der Dimension von $\mathbb{R}^n$ gilt $|I| \leqslant \min\{m, n\} = n$. Sei $k \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash I_0$ beliebig. Wegen Maximalität muss $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0 \cup \{k\}}$ *linear abhängig* sein. Und wegen der linearen Unabhängigkeit von $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in I_0}$ existieren (eindeutige) Koeffizienten $c_{k,i} \in \mathbb{R}$ für $i \in I_0$ so dass

$$\mathbf{z}^{(k)} \quad = \quad \textstyle\sum_{i \in I_0:} \; c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)} \tag{1·3}$$

gilt.

Um nun die Hauptaussage zu zeigen, nehmen wir an, dass $(A|\mathbf{b})$ unlösbar ist. **Zu zeigen:** Es gibt eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist. $\boxed{\text{Angenommen, dies sei nicht der Fall.}}$ Aus dieser Annahme leiten wir folgende Behauptungen ab:

Behauptung 1. Die Verhältnisse zwischen den Zeilenvektoren in (1·3) gelten auch für die Einträge aus $\mathbf{b}$. Das heißt

$$b_k \quad = \quad \textstyle\sum_{i \in I_0:} \; c_{k,i} b_i \tag{1·4}$$

für alle $k \in \{1, 2, \ldots, m + 1\} \backslash I_0$.

Bew. Sei $k \in \{1, 2, \ldots, m + 1\} \backslash I_0$ beliebig. Da $|I_0| \leqslant n < n + 1$ lässt sich eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ wählen, mit $I \supseteq I_0 \cup \{k\}$ und $|I| = n + 1$. Dann per *Annahme* ist $(A|\mathbf{b})_I$ lösbar. Das heißt, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$b_i \quad = \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \tag{1·5}$$

für alle $i \in I$ gilt. Da $k \in I$ und $I_0 \subseteq I$ und wegen (1·3) erhalten wir nun das Verhältnis

$$\begin{aligned} b_k &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{z}^{(k)})_j x_j \\ & \text{ da die Einträge der } k\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(k)} \text{ entsprechen} \\ &\overset{(1·3)}{=} \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i \in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)})_j x_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_0} c_{k,i} z_j^{(i)} x_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^{n} z_j^{(i)} x_j \\
&= \textstyle\sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \\
&\qquad \text{da die Einträge der } i\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(i)} \text{ entsprechen} \\
&\overset{(1\cdot 5)}{=} \textstyle\sum_{i\in I_0} c_{k,i} b_i.
\end{aligned}
$$

Darum gilt die Behauptung. $\dashv$ **(Beh. 1)**

Behauptung 2. Es gibt eine Lösung zu $(A|\mathbf{b})$.

Bew. Da $|I_0| \leqslant n < n+1$ lässt sich eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ wählen, so dass $I \supseteq I_0$ und $|I| = n + 1$. Dann per *Annahme* ist $(A|\mathbf{b})_I$ lösbar. Das heißt, ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$b_i = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \tag{1·6}$$

für alle $i \in I$ gilt. Da $I \supseteq I_0$ können wir **Behauptung 1** und die Verhältnisse in (1·3) anwenden. Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, m\}\backslash I$ gilt

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{z}^{(k)})_j x_j \\
&\qquad \text{da die Einträge der } k\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(k)} \text{ entsprechen} \\
&\overset{(1\cdot 3)}{=} \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i\in I_0} c_{k,i} \mathbf{z}^{(i)})_j x_j \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i\in I_0} c_{k,i} z_j^{(i)} x_j \\
&= \textstyle\sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^{n} z_j^{(i)} x_j \\
&= \textstyle\sum_{i\in I_0} c_{k,i} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \\
&\qquad \text{da die Einträge der } i\text{-ten Zeile den Einträgen von } \mathbf{z}^{(i)} \text{ entsprechen} \\
&\overset{(1\cdot 6)}{=} \textstyle\sum_{i\in I_0} c_{k,i} b_i \\
&\overset{\text{Beh. 1}}{=} b_k
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nicht nur eine Lösung zu Zeile i des LGS, $(A|\mathbf{b})$, für jedes $i \in I$, sondern auch für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, m\}\backslash I$. Das heißt, $\mathbf{x}$ ist eine Lösung des LGS $(A|\mathbf{b})$. Also ist $(A|\mathbf{b})$ lösbar. $\dashv$ **(Beh. 2)**

Laut **Behauptung 2** ist also $(A|\mathbf{b})$ lösbar. Dies ist aber ein Widerspruch! Darum stimmt die *Annahme* oben nicht. Also gibt es *doch* eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $|I| = n + 1$, so dass $(A|\mathbf{b})_I$ unlösbar ist. Damit wurde die zu zeigende Implikation bewiesen. ■ **(Satz 1·7)**

Bemerkung 1·8 Falls man sich aber auf rudimentäre Mitteln beschränken will, kann man alternativ wie folgt vorgehen. Man wende zuerst das Gaußverfahren an und erhalte somit eine Folge

$$(A^{(0)}|\mathbf{b}^{(0)}) \rightsquigarrow (A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}) \rightsquigarrow (A^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$$

wobei $N \in \mathbb{N}$, $A^{(0)} = A$, $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$, $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$ eine erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform ist, und jede der »$\rightsquigarrow$« Übergänge jeweils eine Transformation der Art (I), (II), oder (III) bezeichnet. Da $m > n$ sieht nun die Zeilenstufenform, also $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$, folgendermaßen aus:

$$
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
\underbrace{0\,0\ldots0}_{\ell_1} & \gamma_1 & \cdots\cdots & * & \cdots\cdots & \cdots\cdots & * & \cdots\cdots & b_1^{(N)} \\
0\,0\ldots0 & 0 & \underbrace{0\,0\ldots0}_{\ell_2} & \gamma_2 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & * & \cdots\cdots & b_2^{(N)} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
0\,0\ldots0 & 0 & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & \underbrace{0\,0\ldots0}_{\ell_r} & \gamma_r & \cdots\cdots & b_r^{(N)} \\
0\,0\ldots0 & 0 & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & b_{r+1}^{(N)} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
0\,0\ldots0 & 0 & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & 0\,0\ldots0 & 0 & \cdots\cdots & b_m^{(N)}
\end{array}\right)
$$

wobei $r \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Stufen ist, $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_r \in \mathbb{N}_0$, und $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Hauptkoeffizienten der Stufen sind. Es muss nun $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\} = n$ gelten.

Jetzt kann man leicht dafür argumentiere, dass (1) die Zeilenstufenform, $(A^{(N)}|\mathbf{b}^{(N)})$, die Implikation erfüllt. Dann aufgrund der Umkehrbarkeit der Elementartransformationen, reicht es aus zu zeigen, dass (2): wenn $(A', \mathbf{b}') \rightsquigarrow (A'', \mathbf{b}'')$ und wenn $(A', \mathbf{b}')$ die Implikation erfüllt, dann erfüllt $(A'', \mathbf{b}'')$ die Implikation. Dies ist nur etwas mühseliger und die Argumentation von (2) führt letzten Endes zu ähnlichen Ideen, die im Beweis oben vorkommen. ◊

Übungsserie 2

Woche 2

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 2·1

Satz 2·1 (vgl. [Sin20, Korollar 1.3.3]). *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ wie $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ und sei*

$$L \quad := \quad \{s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

die Verbindungsgerade zw. $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Dann gilt $\mathbf{0} \in L \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}$. ◊

Beweis. Der Beweis wird in zwei Teilen gezeigt.

($\Longrightarrow$). Angenommen, $\mathbf{0} \in L$. **Zu zeigen:** $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}$.
Per Definition von L existiert ein $s \in \mathbb{R}$, so dass sich $\mathbf{0}$ als $\mathbf{0} = s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w}$ darstellen lässt. Daraus lässt sich ableiten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w} &\iff s\mathbf{v} = (s-1)\mathbf{w} \\
&\iff \underbrace{(s = 0 \text{ und } \mathbf{w} = s(\mathbf{w}-\mathbf{v}) = \mathbf{0})}_{\text{unmöglich, da } \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \text{ per Voraussetzung}} \text{ oder } (s \neq 0 \text{ und } \mathbf{v} = ((s-1)/s)\mathbf{w}) \\
&\iff s \neq 0 \text{ und } \mathbf{v} = ((s-1)/s)\mathbf{w} \\
&\implies \exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{v} = c\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$). Angenommen, $\mathbf{v} = c\mathbf{w}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. **Zu zeigen:** $\mathbf{0} \in L$.
Per Voraussetzung gilt nun $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$, sodass $c = 1$ direkt ausgeschlossen ist.
Setze nun $\boxed{s := \frac{1}{1-c} \in \mathbb{R}}$, was wohldefiniert ist, da $c \neq 1$.
Man berechnet nun

$$\overbrace{s\mathbf{v} + (1-s)\mathbf{w}}^{\in L, \text{ per Definition}} \quad = \quad \tfrac{1}{1-c}c\mathbf{w} + (1 - \tfrac{1}{1-c})\mathbf{w} \quad = \quad (\underbrace{\frac{c}{1-c} + 1 - \frac{1}{1-c}}_{= \frac{c-1}{1-c}+1=0})\mathbf{w} \quad = \quad 0\mathbf{w} \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Darum gilt $\mathbf{0} \in L$. ■

Aufgabe 2·2

(a) **Satz 2·2** *Seien* $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{R}^2$ *mit* $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$. *Seien* $L := \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$ *und* $L' := \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\}$. *Angenommen,* $L \neq L'$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $L \cap L' = \emptyset$;

(ii) $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ *sind kolinear, d. h.* $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = c\mathbf{w}'$.

◊

Beweis. Der Beweis wird in zwei Teilen gezeigt.

((ai)⟹(aii)). Angenommen, $L \cap L' = \emptyset$. **Zu zeigen:** $\exists c \in \mathbb{R} : \mathbf{w} = c\mathbf{w}'$.
Angenommen, dies sei nicht der Fall.
Da $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$ bedeutet dies, dass $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ *linear unabhängig* sind. (→ Warum??)
Also gilt für den Untervektorraum $U := \text{Lin}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$, dass $\dim(U) = 2$.
Da $U \subseteq \mathbb{R}^2$ Vektorräume sind und $\dim(U) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, folgt hieraus, dass $U = \mathbb{R}^2$. (→ Warum??)
Betrachte bspw. den Vektor

$$\xi \quad := \quad \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2. \tag{2·1}$$

Dann $\xi \in U = \text{Lin}\{\mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$. Folglich existieren Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}' = \xi$ gilt.
Setze nun $\boxed{t := \alpha}$ und $\boxed{s := -\beta}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overbrace{\mathbf{v} + t\mathbf{w}}^{\in L} &= (\mathbf{v} + t\mathbf{w}) - (\mathbf{v}' + s\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (t\mathbf{w} - s\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\
&= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}') + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \\
&\overset{(2·1)}{=} -\xi + \xi + \mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \qquad = \underbrace{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}'}_{\in L'}.
\end{aligned}$$

Darum gilt $L \cap L' \neq \emptyset$, was ein Widerspruch ist.
Darum stimmt die o. s. Annahme nicht. Also sind $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ kolinear.

((aii)⟹(ai)). Angenommen, $\mathbf{w} = c\mathbf{w}'$ für ein $c \in \mathbb{R}$. **Zu zeigen:** $L \cap L' = \emptyset$.
Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existiert ein Vektor, $\mathbf{u} \in L \cap L'$.
Per Konstruktion existieren dann $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\mathbf{v} + t_0\mathbf{w} \quad = \quad \mathbf{u} \quad = \quad \mathbf{v}' + s_0\mathbf{w}'.$$

Aus der Voraussetzung für diese Richtung folgt

$$\mathbf{v}' \quad = \quad \mathbf{v} + (t_0 - s_0 c)\mathbf{w} \tag{2·2}$$

Beachte, dass $\boxed{c \neq 0}$, denn sonst würde $\mathbf{w} = c\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ gelten, was ein Widerspruch ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
L' &= \{\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' \mid s \in \mathbb{R}\} \\
&\overset{(2·2)}{=} \{\mathbf{v} + (t_0 - s_0 c)\mathbf{w} + sc\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\mathbf{v} + (t_0 + (s - s_0)c)\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in R\},
\end{aligned} \tag{2·3}$$

wobei $R = \{t_0 + (s - s_0)c \mid s \in \mathbb{R}\} = f(\mathbb{R})$. Also $R = f(\mathbb{R})$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine durch $f(s) = t_0 + (s - s_0)c$ definierte Funktion ist. Da $c \neq 0$, ist es einfach zu sehen, dass f surjektiv ist (in der Tat bijektiv). Darum gilt $R = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Aus (2·3) folgt also $L' = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} = L$, was ein Widerspruch ist.
Darum stimmt die o. s. Annahme nicht. Also gilt $L \cap L' = \emptyset$. ■

(b) Wir zeigen nun ein minimales Beispiel dafür, dass Satz 2·2 im allgemeinen für andere Vektorräume nicht gilt. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Betrachte die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} \; = \; \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{v}' \; = \; \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{w} \; = \; \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{w}' \; = \; \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right).$$

Bis auf 2-Dimensionalität erfüllen diese die Voraussetzungen in Satz 2·2. Einerseits wurden $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ so gewählt, dass sie *nicht* kolinear sind. Dennoch schneiden sich die beiden Geraden, L, L', nicht, da $L \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} =: E$ und $L' \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1\} =: E'$ und offensichtlich $E \cap E' = \emptyset$.

Aufgabe 2·3

(a) Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ sei die Gerade $L_\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$L_\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = \gamma \cdot (x - 3y - 7)\}.$$

Satz 2·3 *Es gibt exakt einen Punkt in dem Schnitt aus den Geraden,* L_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$. *Es gilt nämlich* $\bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma = \{\xi\}$, *wobei* $\xi = (1, -2)$. $\Diamond$

Beweis. Wir teilen diesen Beweis in zwei Teilen auf:

($\supseteq$). Es reicht aus, für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ **zu zeigen**, dass $\xi \in L_\gamma$.
Fixiere also ein beliebiges $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{array}{rclclcl} 2\xi_1 + \xi_2 &=& 2 \cdot 1 + (-2) &=& 0, & & \text{und} \\ \gamma \cdot (\xi_1 - 3\xi_2 - 7) &=& \gamma \cdot (1 - 3(-2) - 7) &=& \gamma \cdot 0 &=& 0. \end{array}$$

Also $2\xi_1 + \xi_2 = \gamma \cdot (\xi_1 - 3\xi_2 - 7)$. Folglich gilt $\xi \in L_\gamma$ per Konstruktion.

($\subseteq$). Sei $\eta := (x,y) \in \bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma$ beliebig. **Zu zeigen:** $\eta = \xi$.
Zu diesem Zwecke seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ irgendwelche Werte mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Per Wahl gilt $\eta \in L_{\gamma_1} \cap L_{\gamma_2}$. Also

$$\begin{array}{rcl} 2x + y &=& \gamma_1 \cdot (x - 3x - 7), \text{ und} \\ 2x + y &=& \gamma_2 \cdot (x - 3x - 7). \end{array}$$

Wir können ganz naiv arbeiten und die Gleichungen subtrahieren. Dies liefert $(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot (x - 3x - 7) = 0$, woraus sich ergibt, dass $x - 3y - 7 = 0$ gelten muss, da $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Eingesetzt in die erste Gleichung oben liefert $2x + y = \gamma \cdot 0 = 0$. Darum muss $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ das LGS $(A|\mathbf{b})$ lösen, wobei

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{b} = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Gaußverfahren angewandt auf $(A|\mathbf{b})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftsquigarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right)$$

Aus der Stufenform erschließt sich

$$\begin{array}{rclcl} y &=& \frac{-14}{7} &=& -2 \\ x &=& 7 + 3 \cdot y &=& 1. \end{array}$$

Also $\eta = (x,y) = (1,-2) = \xi$ für alle $\eta \in \bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma$. Das heißt $\bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} L_\gamma \subseteq \{\xi\}$. $\blacksquare$

(b) **(i)** Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} (-3,2) \in L_\gamma & \iff & 2(-3) + (2) = \gamma \cdot ((-3) - 3(2) - 7) \\ & \iff & \gamma = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}. \end{array}$$

Also ist $\boxed{\gamma = \frac{1}{4}}$ der eindeutige Parameter, für den $(-3,2) \in L_\gamma$ gilt.

(ii) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Man beobachte, dass

$$\begin{array}{rcl} L_\gamma & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2-\gamma)x + (1+3\gamma)y = -7\gamma\} \\ & = & \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + (1 + 3\cdot 2)y = -7 \cdot 2\} & : \ \gamma = 2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2 - \frac{-1}{3})x + 0y = -7 \cdot \frac{-1}{3}\} & : \ \gamma = -\frac{1}{3} \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2-\gamma)x + (1+3\gamma)y = -7\gamma\} & : \ \text{sonst} \end{cases} \\ & = & \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\} & : \ \gamma = 2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\} & : \ \gamma = -\frac{1}{3} \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{\gamma-2}{1+3\gamma}x - \frac{7\gamma}{1+3\gamma}\} & : \ \text{sonst} \end{cases} . \end{array}$$

Daraus folgt, dass L_γ

- parallel zur x-Achse für $\gamma = 2$ ist,
- parallel zur y-Achse für $\gamma = -\frac{1}{3}$ ist,
- und ansonsten weder zur x- noch y-Achse parallel ist, da in diesem Falle L_γ die Gerade »$y = ax + b$« ist, wobei $a \neq 0$.

Also ist der gesuchte Parameterwert eindeutig $\boxed{\gamma = -\frac{1}{3}}$.

(iii) Die Gerade »$x - 2y = -1$« lässt sich äquivalent als »$y = \frac{1}{2}x + 1$ darstellen. Darum wird ein Wert $\gamma \in \mathbb{R}$ gesucht, so dass die Gerade L_γ weder zur x- noch y-Achse parallel ist, und die die y-x-Steigung $\frac{1}{2}$ hat. Nach der o. s. Berechnung in (ii) kommt dies nur für den 3. Fall in Frage. Darum gilt

$$\begin{array}{rcl} L_\gamma \text{ parallel zur Gerade »}x - 2y = -1\text{«} & \iff & \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } \frac{\gamma-2}{1+3\gamma} = \frac{1}{2} \\ & \iff & \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } (\gamma - 2) = \frac{1}{2}(1+3\gamma) \\ & \iff & \gamma \notin \{2, -\frac{1}{3}\} \text{ und } \gamma = -5 \\ & \iff & \gamma = -5. \end{array}$$

Also ist der gesuchte Parameterwert eindeutig $\boxed{\gamma = -5}$.

Übungsserie 3

Woche 3

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 3·1

Wir arbeiten im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu berechnen: $U := \mathrm{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap \mathrm{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ als Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
Zu diesem Zwecke betrachte einen beliebigen Vektor, $\xi \in \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\xi \in U &\iff \exists t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R} : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } \xi = t_3\mathbf{w}_1 + t_4\mathbf{w}_2 \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 = t_3\mathbf{w}_1 + t_4\mathbf{w}_2 \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 - t_3\mathbf{w}_1 - t_4\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{w}_1 + t_4\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } A\mathbf{t} = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3·1}$$

wobei

$$A := (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Darum ist es notwendig und hinreichend, die *homogenen Lösungen* für A zu finden, und daraus die Parameter abzulesen.

Homogenes Problem für A:
Zeilentransformationen $Z_2 \leftsquigarrow Z_2 - 3 \cdot Z_1$, $Z_3 \leftsquigarrow Z_3 - Z_1$ anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Wende die Zeilentransformation $Z_2 \leftsquigarrow Z_2 - Z_3$ an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Zeilenstufenform erschließt sich, dass t_4 frei ist. Also $t_4 = \alpha$ für ein frei wählbares $\alpha \in \mathbb{R}$.
Aus der Stufenform von Gleichungen $3, 2, 1$ erschließt sich

$$\begin{aligned}
t_3 &= \tfrac{1}{7}t_4 = \tfrac{1}{7}\alpha \\
t_2 &= \tfrac{8}{11}t_3 = \tfrac{8}{77}\alpha \\
t_1 &= 2t_2 - 4t_3 = \tfrac{16}{77}\alpha - \tfrac{4}{7}\alpha = -\tfrac{28}{77}\alpha
\end{aligned}$$

Man kann o. E. α durch $\beta := -77\alpha$ ersetzen. Also ist die homogene Lösung gegeben durch

$$\mathbf{t} = \beta \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Wir können nun (3·1) fortsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
\xi \in U &\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } A\mathbf{t} = \mathbf{0} \\
&\iff \exists \mathbf{t} \in \mathbb{R}^4 : \xi = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ und } \exists \beta \in \mathbb{R} : \mathbf{t} = \beta \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists \beta \in \mathbb{R} : \xi = \beta \cdot (\underbrace{28\mathbf{v}_1 + -8\mathbf{v}_2}_{=:\mathbf{u}}) \\
&\iff \xi \in \mathsf{Lin}\{\mathbf{u}\}
\end{aligned}
\tag{3·2}
$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^3$.
Es gilt

$$
\mathbf{u} \quad = \quad 28 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 44 \\ 44 \\ 44 \end{pmatrix} \quad = \quad 44 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Aus (3·2) ergibt sich der zu berechnende Untervektorraum als

$$
\mathsf{Lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \cap \mathsf{Lin}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} \quad = \quad U \quad = \quad \mathsf{Lin}\{\mathbf{u}\} \quad = \quad \mathsf{Lin}\{44 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad = \quad \mathsf{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.
$$

Aufgabe 3.2

Seien X, Y nicht leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *ist* $\boxed{\text{\underline{nicht} allgemein gültig}}$. $\Diamond$

Beweis. Betrachte das Beispiel $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, und $f : X \to Y$ mit $f(x) = 2$ für alle $x \in X$. Für $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ gilt $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, während $f(A) \cap f(B) = \{2\} \cap \{2\} = \{2\}$. Also $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Darum ist dies ein Gegenbeispiel zur Aussage. ■

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich genau dann wahr, wenn f injektiv ist.

(b) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq X : f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ *ist* $\boxed{\text{allgemein gültig}}$. $\Diamond$

Für manche (doppelte) Implikationen hier, nämlich für den Umgang mit Existenzquantoren, braucht man Grundkenntnisse in Prädikatenlogik 1. Stufe. Hierfüg gibt es zahlreiche Einführungswerke in die mathematische Logik, bspw. [EFT18].

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$ für alle $y \in Y$ gilt.
Sei also $y \in Y$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B : y = f(x) \\
&\iff \exists x \in X : x \in A \cup B \,\text{und}\, y = f(x) \\
&\iff \exists x \in X : (x \in A \,\text{oder}\, x \in B) \,\text{und}\, y = f(x) \\
&\iff \exists x \in X : \big((x \in A \,\text{und}\, y = f(x)) \,\text{oder}\, (x \in B \,\text{und}\, y = f(x))\big) \\
&\iff \exists x \in X : (x \in A \,\text{und}\, y = f(x)) \,\text{oder}\, \exists x \in X : (x \in B \,\text{und}\, y = f(x)) \\
&\iff \exists x \in A : y = f(x) \,\text{oder}\, \exists x \in B : y = f(x) \\
&\iff y \in f(A) \,\text{oder}\, y \in f(B) \\
&\iff y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

Darum gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$. ■

(c) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A \subseteq X : f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$ *ist* $\boxed{\text{\underline{nicht} allgemein gültig}}$. $\Diamond$

Beweis. Betrachte das Beispiel $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, und $f : X \to Y$ mit $f(x) = 2$ für alle $x \in X$. Für $A = \{0\}$ gilt $f(X \backslash A) = f(\{1\}) = \{2\}$, während $Y \cap f(A) = \{2\} \backslash \{2\} = \emptyset$. Also $f(X \backslash A) \neq Y \cap f(A)$. Darum ist dies ein Gegenbeispiel zur Aussage. ■

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich genau dann wahr, wenn f bijektiv ist. Und eine leicht modifizierte Aussage, $\forall A \subseteq X : f(X \backslash A) = f(X) \cap f(A)$, ist genau dann wahr, wenn f injektiv ist.

(d) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq Y : f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ *ist* $\boxed{\text{allgemein gültig}}$. $\Diamond$

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $x \in X$ gilt.
Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\
&\iff f(x) \in A \,\text{und}\, f(x) \in B \\
&\iff x \in f^{-1}(A) \,\text{und}\, x \in f^{-1}(B) \\
&\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).
\end{aligned}$$

Darum gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$. ■

(e) Behauptung. *Die Aussage* $\forall A, B \subseteq Y : f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ *ist* $\boxed{\text{allgemein gültig}}$. $\Diamond$

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ beliebige Teilmengen. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $x \in X$ gilt.

Sei also $x \in X$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ oder } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ oder } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Darum gilt $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$. ■

Aufgabe 3.3

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x) = x + v$ definiert.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{bijektiv}}$. ◊

Beweis. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $g(x) = x - v$ definiert. Es ist einfach zu sehen, dass $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Per Definition ist als f eine Bijektion mit Inversem g. ■

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. Sei Y die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^n$. Sei $f : X \to Y$ durch $f(v, w) = \{v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$ definiert.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{surjektiv}}$ *aber* $\boxed{\textit{nicht injektiv}}$. ◊

Beweis. **Surjektivität**
Idee: Folgt aus der Definition von Geraden durch Parameter.
Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Gerade. **Zu zeigen:** $L \in f(X)$.
Nun, *per Definition* einer Geraden existieren $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq \mathbf{0}$ und so dass $L = \{u + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Offensichtlich gilt $(v, w) \in X$. Darum gilt $L = f((v, w)) \in f(X)$.

Nichtinjektivität
Idee: Wir wissen, dass verschiedene aber parallele Vektoren dieselbe Gerade definieren.
Fixiere beliebiges $v, w \in \mathbb{R}^n$ und wähle ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Dann sind $w, cw \neq \mathbf{0}$ verschiedene aber parallele Vektoren.
Darum gilt $f((v, w)) = \{v + t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\} = \{v + tc \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\} = f((v, cw))$.
Da $(v, w) \neq (v, cw)$, ist f somit nicht injektiv. ■

(c) Es sei X die Menge aller Bücher in einem fixierten Kontext. Sei Y die Menge alle Autor(inn)en von Büchern. Sei $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ definiert durch $f(x) = \{y \mid y \text{ ein(e) Autor(in) vom Buch } x\}$ für alle $x \in X$.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{nicht im Allgemeinen injektiv}}$ *und* $\boxed{\textit{niemals surjektiv}}$. ◊

Beweis. **Nichtsurjektivität**
Zu zeigen: Es gibt konstellationen von Autor(inn)en, die kein gemeinsames Buch verfasst haben.
Es gibt *immer* eine(n) Autor(in) eines Buchs, sodass $\emptyset \notin f(X)$ in allen Kontexten. Darum ist f niemals surjektiv.

Nichtinjektivität
Zu zeigen: Es gibt zwei verschiedene Bücher, die von der gleichen Konstellation an Autor(inn)en verfasst wurden. In unserem Kontext hat bspw. a = *JK Rowling* alleine die Bücher $b_1 :=$ »*HP and the Philosopher's Stone*« und $b_2 :=$ »*HP and the Goblet of Fire*« geschrieben. Darum $b_1 \neq b_2$ und $f(b_1) = \{a\} = f(b_2)$. Also ist f in unserem Kontext nicht injektiv. ■

Anmerkung. Falls wir $\emptyset$ von der Bildmenge $\mathcal{P}(Y)$ exludieren, dann können wir mindestens dafür argumentieren, dass f $\boxed{\text{nicht im Allgemeinen surjektiv}}$ ist: In unserem konkreten Kontext haben bspw. *JK Rowling* und *Oscar Wilde* nie am selben Buch gearbeitet, also gilt $\{\text{JK Rowling, Oscar Wilde}\} \notin f(X)$. In der Tat ist ein Kontext kaum vorstellbar, in dem sich *alle* Autor(inn)en an einem gemeinsamen Buch beteiligt haben, d. h. $Y \in f(X)$ sowie alle „große" Teilmengen sind fast immer ausgeschlossen.

(d) Seien X die Menge aller in Deutschland zugelassener Kfz und Y die Menge aller amtlicher Kennzeichen. Sei $f : X \to Y$ die Abbildung, die jedem Kfz sein Kennzeichen zuordnet.

Behauptung. *f ist* $\boxed{\textit{injektiv}}$ *aber* $\boxed{\textit{nicht im Allgemeinen surjektiv}}$. ◊

Beweis. **Injektivität:** Jedes Kennzeichen darf per Gesetz nur einem Kfz zugehören. **Nichtsurjektivität:** Es besteht zwar die Chance, dass irgendwann alle Kennzeichen aufgebraucht werden, aber in der Praxis ist die Menge Y sehr groß, dass dies aktuell und für eine lange Zeit nicht vorkommt. ■

Übungsserie 4

Woche 4

ACHTUNG. Diese Lösungen dienen *nicht* als Musterlösungen sondern eher als Referenz. Hier wird eingehender gearbeitet, als generell verlangt wird. Das Hauptziel hier ist, eine Variant anzubieten, gegen die man seine Versuche vergleichen kann.

Aufgabe 4·1

(a) Betrachte die Menge $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und die binäre Relation, $\sim \subseteq X \times X$, die durch

$$(a, b) \sim (a', b') \quad \Longleftrightarrow \quad ab' = a'b$$

für $(a, b), (a', b') \in X$ definiert wird.

Behauptung. $(X, \sim)$ *ist eine Äquivalenzrelation.* ◊

Beweis. Wir gehen die Axiome durch:

Reflexivität: Sei $(a, b) \in X$ beliebig. **Zu zeigen:** $(a, b) \sim (a, b)$.
Offensichtlich gilt $ab = ab$.
Per Konstruktion gilt also $(a, b) \sim (a, b)$.

Symmetrie: Seien $(a, b), (a', b') \in X$ beliebig. **Zu zeigen:** $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$.
Es gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (a', b') &\Longleftrightarrow ab' = a'b && \text{(per Konstruktion)} \\ &\Longrightarrow a'b = ab' \\ &\Longleftrightarrow (a', b') \sim (a, b) && \text{(per Konstruktion).} \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in X$ beliebig.
Zu zeigen: $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'') \Rightarrow (a, b) \sim (a'', b'')$.
Es gilt

$$\begin{aligned} &(a, b) \sim (a', b') \\ &\text{und } (a', b') \sim (a'', b'') &&\Longleftrightarrow ab' = a'b \text{ und } a'b'' = a''b' \\ & && \quad \text{(per Konstruktion)} \\ & &&\Longrightarrow (ab'')b' = (ab')b'' = (a'b)b'' = (a'b'')b = (a''b')b = (a''b)b' \\ & &&\Longrightarrow ab'' = a''b, \\ & && \quad \text{da } b' \neq 0 \\ & &&\Longleftrightarrow (a, b) \sim (a'', b'') \\ & && \quad \text{(per Konstruktion).} \end{aligned}$$

Darum erfüllt $(X, \sim)$ die Axiome einer Äquivalenzrelation. ■

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $f : X/\sim \to \mathbb{Q}$ definiert durch $f([(a, b)]) = a/b$ wohldefiniert und bijektiv ist. In der Tat realisieren manche Werke die rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}$, als genau diesen Quotientenraum, d. h. man kann die Äquivalenzklassen hier als rationale Zahlen deuten.

(b) Betrachte die Menge $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und die binäre Relation, $\leqslant \subseteq X \times X$, die durch

$$(a, b) \leqslant (a', b') \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant a' \text{ und } b \leqslant b'$$

für $(a, b), (a', b') \in X$ definiert wird.

Behauptung. $(X, \leqslant)$ *ist ist eine Halbordnung aber* $\boxed{\textit{nicht total}}$. $\lozenge$

Beweis. Wir gehen die Axiome durch:

Reflexivität: Sei $(a, b) \in X$ beliebig. **Zu zeigen:** $(a, b) \leqslant (a, b)$.
Offensichtlich gilt $a \leqslant a$ und $b \leqslant b$.
Per Konstruktion gilt also $(a, b) \leqslant (a, b)$.

Antisymmetrie: Seien $(a, b), (a', b') \in X$ beliebig.
Zu zeigen: $(a, b) \leqslant (a', b')$ und $(a', b') \leqslant (a, b) \Rightarrow (a, b) = (a', b')$.
Es gilt

$$\begin{aligned} &(a, b) \leqslant (a', b') \\ &\text{und } (a', b') \leqslant (a, b) &&\iff a \leqslant a' \text{ und } b \leqslant b' \text{und } a' \leqslant a \text{ und } b' \leqslant b \\ & && \text{(per Konstruktion)} \\ & &&\implies a = a \text{ und } b = b', \\ & && \text{da } (\mathbb{Z}, \leqslant) \text{ antisymmetrisch ist} \\ & &&\iff (a, b) = (a', b'). \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in X$ beliebig.
Zu zeigen: $(a, b) \leqslant (a', b')$ und $(a', b') \leqslant (a'', b'') \Rightarrow (a, b) \leqslant (a'', b'')$.
Es gilt

$$\begin{aligned} &(a, b) \leqslant (a', b') \\ &\text{und } (a', b') \leqslant (a'', b'') &&\iff a \leqslant a' \text{ und } b \leqslant b' \text{und } a' \leqslant a'' \text{ und } b' \leqslant b'' \\ & && \text{(per Konstruktion)} \\ & &&\implies a \leqslant a'' \text{ und } b \leqslant b'', \\ & && \text{da } (\mathbb{Z}, \leqslant) \text{ transitiv ist} \\ & &&\iff (a, b) \leqslant (a'', b'') \\ & && \text{(per Konstruktion).} \end{aligned}$$

Darum erfüllt $(X, \leqslant)$ die Axiome einer Halbordnung.
Zum Schluss, beachte, dass $(0, 1)$ und $(1, 0)$ bzgl. $\leqslant$ unvergleichbar sind. Darum ist $(X, \leqslant)$ nicht total. $\blacksquare$

Aufgabe 4.2

Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die binäre Relation $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mittels

$$a \ \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(b,n)$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) Behauptung. $(\mathbb{Z}, \sim)$ *ist eine Äquivalenzrelation.* $\Diamond$

Beweis. Wir gehen die Axiome durch:

Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a \sim a$.
Offensichtlich gilt $\mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a,n)$.
Per Konstruktion gilt also $(a,b) \sim (a,b)$.

Symmetrie: Seien $a, a' \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a \sim a' \Rightarrow a' \sim a$.
Es gilt

$$\begin{aligned} a \sim a' &\Longleftrightarrow \mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a',n) \quad \text{(per Konstruktion)} \\ &\Longrightarrow \mathrm{mod}(a',n) = \mathrm{mod}(a,n) \\ &\Longleftrightarrow a' \sim a \quad \text{(per Konstruktion).} \end{aligned}$$

Transitivität: Seien $a, a', a'' \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu zeigen:** $a \sim a'$ und $a' \sim a'' \Rightarrow a \sim a''$.
Es gilt

$$\begin{aligned} a \sim a' \text{ und } a' \sim a'' &\Longleftrightarrow \mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a',n) \text{ und } \mathrm{mod}(a',n) = \mathrm{mod}(a'',n) \\ &\qquad \text{(per Konstruktion)} \\ &\Longrightarrow \mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a'',n) \\ &\Longleftrightarrow a \sim a'' \quad \text{(per Konstruktion).} \end{aligned}$$

Darum erfüllt $(\mathbb{Z}, \sim)$ die Axiome einer Äquivalenzrelation. ■

Bemerkung. Es gibt einen einfacheren Ansatz. Zunächst beweist man das allgemeine Lemma: Für jede Äquivalenzrelation $(Y, \approx)$ und jede Relation (X, R), falls eine Funktion $f : X \to Y$ existiert, so dass $\forall x, x' \in X : (x, x') \in R \Leftrightarrow f(x) \approx f(x')$, so gilt dass (X, R) eine Äquivalenzrelation ist. Und jetzt wendet man dies auf unseren Kontext an: Wir die Äquivalenzrelation $(\{0, 1, 2 \ldots, n-1\}, =)$ und die Relation $(\mathbb{Z}, \sim)$ und eine Abbildung $f : a \in \mathbb{Z} \mapsto \mathrm{mod}(a,n)$, für die $\forall a, a' \in \mathbb{Z} : (a, a') \in \sim \Leftrightarrow f(a) \approx f(a')$ *per Konstruktion* gilt. Darum ist $(\mathbb{Z}, \sim)$ eine Äquivalenzrelation.

(b) Behauptung. *Es gibt* n *Äquivalenzklassen.* $\Diamond$

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho \quad : \quad \mathbb{Z}/\sim \quad &\to \quad \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ : \quad [a] \quad &\mapsto \quad \mathrm{mod}(a,n) \end{aligned}$$

Es reicht aus **zu zeigen**, dass ρ eine wohldefinierte Bijektion ist.

Wohldefiniertheit: Sei $C \in \mathbb{Z}/\sim$ beliebig. Seien $a, a' \in \mathbb{Z}$ mit $[a] = C$ und $[a'] = C$.
Zu zeigen: $\mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a',n)$.
Aus $[a] = C = [a']$ folgt $a \sim a'$ und damit per Konstruktion $\mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a',n)$. Darum ordnet ρ einen eindeutig Wert $[a]$ zu.

Injektivität: Seien $C, C' \in \mathbb{Z}/\sim$ beliebig. **Zu zeigen:** $\rho(C) = \rho(C') \Rightarrow C = C'$.
Wähle zunächst $a, a' \in \mathbb{Z}$, so dass $C = [a]$ und $C = [a']$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(C) = \rho(C') &\Longrightarrow \mathrm{mod}(a,n) = \mathrm{mod}(a',n) \\ &\Longrightarrow a \sim a' \\ &\Longrightarrow C = [a] = [a'] = C'. \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ beliebig. **Zu zeigen:** $k \in \rho(\mathbb{Z}/\sim)$.
Setze $C = [k] \in \mathbb{Z}/\sim$. Dann $\rho(C) = \mathrm{mod}(k,n) = k$.[a] Also gilt $k \in \rho(\mathbb{Z}/\sim)$.

Darum ist ρ eine Bijektion. Also gilt $|\mathbb{Z}/\sim| = |\{0, 1, \ldots, n-1\}| = n$. ■

(c) Laut der Berechnung in Aufgabe 2(b) gilt $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$. Für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

[a] Seien $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit $qn + r = k$. Da $k, r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, gilt $qn = k - r \in \mathbb{Z} \cap (-n, n)$. Also muss $q = 0$ gelten. Also $r = k$. Also $\mathrm{mod}(k,n) = r = k$.

lässt sich die Äquivalenzklasse $[k]$ wie folgt als Teilmenge beschreiben

$$\begin{array}{rcl} [k] & = & \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim k\} \text{ per Definition} \\ & = & \{a \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{mod}(a,n) = \mathsf{mod}(k,n)\} \\ & = & \{a \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{mod}(a,n) = k\} \\ & = & \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a = qn + r\} \\ & = & \{qn + r \mid q \in \mathbb{Z}\} \\ & = & \mathbb{Z} \cdot n + r. \end{array}$$

Also lassen sich die Äquivalenzklassen durch die Teilmengen $\{\mathbb{Z} \cdot n + r \mid r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ darstellen.

Aufgabe 4·3

Behauptung. *Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit $\Phi(n)$ die Aussage, dass für alle Mengen X, Y mit $|X| = |Y| = n$*

$$|\{f \mid f \text{ eine Bijektion zw. } X \text{ und } Y\}| \quad = \quad n!. \tag{4·1}$$

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ♢

Beweis (Ansatz I). Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien X, Y n-elementige Mengen. Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Auflistung der Elemente in X. Um eine Injektion zw. X und Y zu definieren, wählt man zuerst ein Element $y_1 \in Y$ für x_1 (dafür gibt es n Möglichkeiten), dann ein Element $y_2 \in Y$ for x_2 (dafür bleiben $n-1$ Möglichkeiten übrig), usw. Darum gibt es insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$ Injektionen zwischen X und Y. Da X und Y endlich und gleichmächtig sind, ist jede Injektion zwischen diesen Mengen automatisch surjektiv und damit bijektiv. Darum gibt es $n!$ Bijektionen zwischen X und Y. ■ **(Ansatz I)**

Beweis (Ansatz II). Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Für 1-elementigen Mengen X, Y, gibt es offensichtlich exakt eine Funktion zwischen X und Y, und dies ist eine Bijektion. Darum gilt (4·1).

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 1$. Angenommen, $\Phi(n-1)$ gilt.

Induktionsschritt: Seien X, Y beliebige n-elementige Mengen. **Zu zeigen:** (4·1) gilt. Fixiere $x_0 \in X$. Beobachte, dass für alle $y_0 \in Y$ die Mengen $X' := X \backslash \{x_0\}$ und $Y' := Y \backslash \{y_0\}$ beide $n-1$-elementig sind. Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{array}{rclcl} F & : & \{g \mid g \,\text{Bij. zw. } X \backslash \{x_0\} \text{ und } Y \backslash \{x_0\}\} & \to & \{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y,\ f(x_0) = y_0\} \\ & : & g & \mapsto & g \cup \{(x_0, y_0)\}. \end{array}$$

Das heißt, jede Bijektion $g : X \backslash \{x_0\} \to Y \backslash \{y_0\}$ wird durch F zu einer Funktion von X nach Y fortgesetzt, indem das zusätzliche Element, x_0, auf y_0 abgebildet wird. Es ist einfach zu sehen, dass F wohldefiniert ist, d. h. für jede Bijektion $g : X \backslash \{x_0\} \to Y \backslash \{y_0\}$, es gilt, dass $F(g)$ eine wohldefinierte Funktion zwischen X und Y ist und weiterhin ist dies eine Bijektion. Außerdem ist es klar, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rclcl} G & : & \{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y,\ f(x_0) = y_0\} & \to & \{g \mid g \,\text{Bij. zw. } X \backslash \{x_0\} \text{ und } Y \backslash \{x_0\}\} \\ & : & f & \mapsto & f|_{X \backslash \{x_0\} \times Y \backslash \{x_0\}} \end{array}$$

die Abbildung F nach rechts und links invertiert. Also ist G eine Bijektion. Daraus folgt per Definition von Kardinalität

$$\begin{array}{rcl} |\{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y,\ f(x_0) = y_0\}| & = & |\{g \mid g \,\text{Bij. zw. } X \backslash \{x_0\} \text{ und } Y \backslash \{x_0\}\}| \\ & = & (n-1)! \text{ laut IV.} \end{array} \tag{4·2}$$

Anderseits ist $(\{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y,\ f(x_0) = y_0\})_{y_0 \in Y}$ eine Partition von $\{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y\}$. Darum gilt

$$\begin{array}{rcl} |\{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y\}| & = & |\bigcup_{y_0 \in Y} \{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y,\ f(x_0) = y_0\}| \\ & = & \sum_{y_0 \in Y} |\{f \mid f \,\text{Bij. zw. } X \text{ und } Y,\ f(x_0) = y_0\}| \\ & & \text{wegen paarweise Disjunktheit} \\ & \overset{(4·2)}{=} & \sum_{y_0 \in Y} (n-1)! = |Y| \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n!. \end{array}$$

Also gilt (4·1).

Darum gilt $\Phi(n)$ per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$. ■ **(Ansatz II)**

TEIL II

Selbstkontrollenaufgaben

SKA Blatt 4

Woche 4

SKA 4·1

Seien X, Y nicht leere Mengen. Einer Abbildung, $f : X \to Y$, können wir eindeutig die Relation $\mathrm{Gph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$ zuordnen. Dies nennt sich der **Graph von** f (siehe [Sin20, §2.3]—dort wird dies mit Γ_f bezeichnet). Hier ist $\mathrm{Gph}(f)$ also eine Relation auf $X \times Y$. In der Tat *setzen* manche Werke Funktionen mit ihrem Graphen gleich (siehe bspw. [Jec97, S.11]), aber dies ist streng genommen nicht die ganze Wahrheit.

SKA 4·2

Hinweis: Hier scheint im Punkt (ii) etwas verwechselt worden zu sein.

Seien M, N Mengen und $R \subseteq M \times N$.

Behauptung 4·1 *Angenommen, R erfülle folgende Eigenschaften:*

(i) $\forall x \in M : \exists y \in N : (x, y) \in R$

(ii) $\forall x \in M : \forall y, y' \in N : (x, y), (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$

Dann existiert eine (notwendigerweise eindeutige) Funktion, $f : M \to N$, so dass Gph$(f) = R$. ♢

Beweis. Wir definieren $f : M \to N$ durch

$$f(x) \quad = \quad y$$

für $(x, y) \in R$. Offensichtlich gilt $\mathrm{Gph}(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid f(x) = y\} = \{(x, y) \in M \times N \mid (x, y) \in R\} = R$.

Zu zeigen: (1) f ist überall definiert; (2) f ist wohldefiniert.

Überall definiert: Sei $x \in M$. **Zu zeigen:** $f(x) = y$ für ein $y \in N$.
Eigenschaft besagt, dass ein $y \in M$ existiert, so dass $(x, y) \in R$. Per Konstruktion erhalten wir, dass $f(x) = y$ gilt.

Wohldefiniertheit: Seien $x \in M$ und $y, y' \in N$. Angenommen, $f(x) = y$ und $f(x) = y'$.
Zu zeigen: $y = y'$.
Aus $f(x) = y$ und $f(x) = y'$ folgt $(x, y), (x, y') \in R$ per Konstruktion von f.
Eigenschaft besagt, dass $y = y'$.

Darum ist f eine Abbildung zwischen M und N und $\mathrm{Gph}(f) = R$. ■

SKA 4·3

Sei $X = \{a, b, c\}$ und betrachte die binäre Relation, $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$, definiert durch

$$A \leqslant B \quad \Longleftrightarrow \quad X \backslash A \subseteq X \backslash B$$

für $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Behauptung. $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ *ist eine partielle Ordnung (auch »Halbordnung« genannt).* $\lozenge$

Es gibt nun 3 Ansätze, um dies zu zeigen.

Beweis (Ansatz I). Beobachte, dass für $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{array}{rcl} A \leqslant B & \overset{\text{Defn}}{\iff} & X\backslash A \subseteq X\backslash B \\ & \Longrightarrow & X\backslash(X\backslash A) \supseteq X\backslash(X\backslash B) \\ & \Longrightarrow & A \supseteq B, \text{ da } A, B \subseteq X \\ & \Longrightarrow & X\backslash A \subseteq X\backslash B \\ & \overset{\text{Defn}}{\iff} & A \leqslant B, \end{array}$$

also $A \leqslant B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Darum kann $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ mit $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$ identifiziert werden. Letzteres ist bekanntermaßen eine Halbordnung. ■ **(Ansatz I)**

Beweis (Ansatz II). Im konkreten Falle von $X = \{a, b, c\}$ können wir die Relation durch ein *Hasse-Diagramm* skizzieren:

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset & \\
\{a\} \arrow[ur] & \{b\} \arrow[u] & \{c\} \arrow[ul] \\
\{a,b\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{b,c\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & X \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Man sieht, dass dies einen *Verband* und damit insbesondere eine Halbordnung bildet. ■ **(Ansatz II)**

Beweis (Ansatz III). Wir gehen die Axiome einer Halbordnung durch:

Reflexivität: Sei $A \in \mathcal{P}(X)$ beliebig. **Zu zeigen:** $A \leqslant A$.
Offensichtlich gilt $X\backslash A \subseteq X\backslash A$.
Per Konstruktion gilt also $A \leqslant A$.

Antisymmetrie: Seien $A, A' \in \mathcal{P}(X)$ beliebig.
Zu zeigen: $A \leqslant A'$ und $A' \leqslant A \Rightarrow A = A'$.
Es gilt

$$\begin{array}{rcll} A \leqslant A' \text{ und } A' \leqslant A & \iff & X\backslash A \subseteq X\backslash A' \text{ und } X\backslash A' \subseteq X\backslash A & \text{(per Konstruktion)} \\ & \Longrightarrow & X\backslash A = X\backslash A' & \text{(per Definition von Mengengleichheit)} \\ & \Longrightarrow & A = A', & \text{da } A, A' \subseteq X. \end{array}$$

Transitivität: Seien $A, A', (a'', b'') \in \mathcal{P}(X)$ beliebig.
Zu zeigen: $A \leqslant A'$ und $A' \leqslant A'' \Rightarrow A \leqslant A''$.
Es gilt

$$\begin{array}{rcl} A \leqslant A' \text{ und } A' \leqslant A'' & \iff & X\backslash A \subseteq X\backslash A' \text{ und } X\backslash A' \subseteq X\backslash A'' \text{ (per Konstruktion)} \\ & \Longrightarrow & X\backslash A \subseteq X\backslash A'' \\ & \iff & A \leqslant A'' \text{ (per Konstruktion).} \end{array}$$

Darum erfüllt $(\mathcal{P}(X), \leqslant)$ die Axiome einer Halbordnung. ■ **(Ansatz III)**

SKA 4.4

Betrachten wir die Halbordnung aus [Sin20, Beispiel 2.4.2(2)]. Es sei also $C = \{a, b, c\}$ und die durch folgendes *Hasse-Diagramm* dargestellte Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(C)$:

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir das Element $\emptyset$ von $\mathcal{P}(C)$ entfernen sieht die Struktur folgendermaßen aus

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
\{a,b\} \arrow[ur] & \{a,c\} \arrow[u] & \{b,c\} \arrow[ul] \\
\{a\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{b\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{c\} \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich hat $(\mathcal{P}(C)\backslash\{\emptyset\}, \subseteq)$ kein kleinstes Element. Die Menge der minimalen Elementen ist durch $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ gegeben. Also gibt es 3 minimale Elemente.

SKA 4·5

Sei W die Menge aller Wörter und Σ die Menge aller Buchstaben. O. E. können wir annehmen, dass jedes Wort $w \in W$ der Länge $|w| \geqslant 2$ ist. (In Sprachen wie Englisch, Russisch, usw. ist dies nicht der Fall, aber wir könnten diese trivialen Wörter einfach ausschließen.)

Betrachten wir die Relation $(W, \sim)$ gegeben durch

$$w \sim w' \quad :\Longleftrightarrow \quad f(w) = f(w), \tag{4·1}$$

wobei $f : W \to \Sigma$ die Abbildung mit $f(w) = 1$. Buchstabe in w für alle $w \in W$ ist.

Dann per Konstruktion reduziert f die Relation $(W, \sim)$ auf $(\Sigma, =)$. Aufgrund dessen und da $(\Sigma, =)$ eine Äquivalenzrelation ist, ist $(W, \sim)$ automatisch eine Äquivalenzrelation auch.

Eigentlich spielt est keine Rolle, wie die Funktion, f, aussieht. Solange die Reduktion (4·1) gilt, bleibt $(W, \sim)$ eine Äquivalenzrelation. Dies gilt also insbesondere ebenfalls, wenn f den zweitletzten Buchstaben von Wörtern berechnet.

SKA 4·6

(a)
$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=2}^{6}(-1)^i i^2 &= (-1)^2 \cdot 2^2 + (-1)^3 \cdot 3^2 + (-1)^4 \cdot 4^2 + (-1)^5 \cdot 5^2 + (-1)^6 \cdot 6^2 \\
&= 4 - 9 + 16 - 25 + 36 = 22
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_{j=1}^{4}(2j - 1) &= (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) \\
&= 1 - 3 + 5 - 7 = -4
\end{aligned}$$

SKA 4·7

Behauptung 4·3 *Bezeichne mit $\Phi(n)$ die Aussage*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 \quad = \quad (-1)^n \frac{1}{2} n(n+1). \tag{4·2}$$

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. $\Diamond$

Beweis. Wir zeigen Behauptung 4·3 stumpf per Induktion.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann

$$\begin{array}{rcl}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 &=& (-1)^1 1^2 = -1\\ (-1)^n \frac{1}{2}n(n+1) &=& (-1)^1\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1) = -1\end{array}$$

Also gilt (4·2). Also gilt $\Phi(1)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 1$. Angenommen, $\Phi(n-1)$ gilt.

Induktionsschritt: **Zu zeigen:** $\Phi(n)$ gilt, d. h. Gleichung (4·2) gilt.
Es gilt

$$\begin{array}{rcl}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 &=& \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i i^2 + (-1)^n n^2\\ &=& (-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) + (-1)^n n^2\\ && \text{wegen der IV}\\ &=& (-1)^n\cdot(-\frac{1}{2}n(n-1)+n^2)\\ &=& (-1)^n\cdot(-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n^2)\\ &=& (-1)^n\cdot(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n)\\ &=& (-1)^n\frac{1}{2}n(n+1).\end{array}$$

Also gilt (4·2). Also gilt $\Phi(n)$.

Also gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ■

Für die Summe $\sum_{i=3}^{n}(-1)^i i^2$ ist der Ausdruck lediglich

$$\begin{array}{rcl}\sum_{i=3}^{n}(-1)^i i^2 &=& \sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 - (-1)^1\cdot 1 - (-1)^2 2^2\\ &=& (-1)^n\frac{1}{2}n(n+1) - 3\end{array}$$

für alle $n \geqslant 3$. Sollten wir dies per Induktion beweisen wollen, brauchen wir lediglich im o. s. Beweis den **Induktionsanfang** auf $n = 3$ zu ändern. Der Rest bleibt erhalten.

Bemerkung 4·4 Man merkt, dass Induktion mit Deduzieren (»Ableiten«) nichts zu tun hat. Induktion ist schließlich nur ein Werkzeug, um Behauptungen zu *verifizieren*. Sie verschafft uns aber keine Mittel, um *auf die Behauptungen zu kommen*. In diesem konkreten Falle wurde Vorarbeit geleistet und *direkt* argumentiert, um auf den Ausdruck in (4·2) zu kommen. Ohne diese Arbeit wären wir auf diesen Ausdruck gar nicht gekommen. In dieser Vorarbeit steckt also die eigentliche mathematische Arbeit und dies bedarf etwas Kreativität, Intuition, usw. Häufig reicht diese Vorarbeit aber nur, um auf eine sinnvolle Behauptung zu kommen, und zum Schluss runden wir dies mit Induktion ab, um formal die behauptete Aussage zu bestätigen. Das ist die eigentliche Rolle von Induktion als Beweismittel. ◊

SKA 4·8

Kurzes Argument:
Wenn jede Farbe jeweils auf maximal 1 Karte vorkommt, gibt es $\leqslant 4\cdot 1$ Karten. Aber 5 Karten werden gewählt.

Ausführliches Argument:
Seien $X := \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ die Menge der Farben und $Y := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Indizes der Karten. Sei $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ die Funktion, die der Wahl entspricht, d. h.

$$f(x) \quad = \quad \{y \in Y \mid \text{Karte } y \text{ hat Farbe } x\}$$

für alle Farben $x \in X$.

Nun, jede Karte, $y \in Y$, hat eine Farbe, sodass $y \in f(x)$ für ein $x \in X$. Also $Y \subseteq \bigcup_{x\in X} f(x)$. Und per Definition $f(x) \subseteq Y$ für alle $x \in X$. Darum $\bigcup_{x\in X} f(x) \subseteq Y$. Also

$$Y \quad = \quad \bigcup_{x\in X} f(x)$$

Andererseits sind die Mengen $(f(x))_{x\in X}$ paarweise disjunkt, da jede Karte höchstens eine Farbe hat. Also ist $(f(x))_{x\in X}$ eine *Partition* von Y. Darum

$$\begin{array}{rl} & |Y| = |\bigcup_{x\in X} f(x)| = \sum_{x\in X}|f(x)| \leqslant |X|\cdot \max_{x\in X}|f(x)|\\ \Longrightarrow & \max_{x\in X}|f(x)| \geqslant |Y|/|X| = 5/4 > 1\\ \Longrightarrow & \exists x \in X : |f(x)| > 1\\ \Longrightarrow & \exists x \in X : |f(x)| \geqslant 2\end{array}$$

Nach der Definition von f heißt dies, es gibt eine Farbe, $x \in \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, so dass $\geqslant 2$ der gezogenen Karten der Farbe x sind.

SKA 4·9

Kurzes Argument:
Wenn jeder Kalendartag jeweils von maximal 17 Studierenden gefeiert wird, gibt es $\leqslant 366 \cdot 17 = 6222$ Studierende. Aber es gibt $\geqslant 7000$ Studierende.

Ausführliches Argument:
Seien $X = \{1.\ \text{Jan}, 2.\ \text{Jan}, \ldots, 31.\ \text{Dez}\}$ die Menge der Kalendartage und $Y = \{x \mid x \text{ ein/e Studierende/r an der Uni Leipzig}\}$. Sei $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ die Funktion, die der Wahl entspricht, d. h.

$$f(x) \quad = \quad \{y \in Y \mid \text{Studierende/r } y \text{ hat am Tag } x \text{ Geburtstag}\}$$

für alle Kalendartage $x \in X$.

Nun, jede/r Studierende/r, $y \in Y$, hat einen Geburtstag, sodass $y \in f(x)$ für ein $x \in X$. Also $Y \subseteq \bigcup_{x \in X} f(x)$. Und per Definition $f(x) \subseteq Y$ für alle $x \in X$. Darum $\bigcup_{x \in X} f(x) \subseteq Y$. Also

$$Y \quad = \quad \bigcup_{x \in X} f(x)$$

Andererseits sind die Mengen $(f(x))_{x \in X}$ paarweise disjunkt, da jede/r Studierende/r höchstens einen Geburtstag hat. Also ist $(f(x))_{x \in X}$ eine *Partition* von Y. Darum

$$\begin{array}{ll} & |Y| = |\bigcup_{x \in X} f(x)| = \sum_{x \in X} |f(x)| \leqslant |X| \cdot \max_{x \in X} |f(x)| \\ \Longrightarrow & \max_{x \in X} |f(x)| \geqslant |Y|/|X| \geqslant 7000/366 > 19 \\ \Longrightarrow & \exists x \in X : |f(x)| > 19 \\ \Longrightarrow & \exists x \in X : |f(x)| \geqslant 20 \end{array}$$

Nach der Definition von f heißt dies, es gibt einen Kalendartag, $x \in \{1.\ \text{Jan}, 2.\ \text{Jan}, \ldots, 31.\ \text{Dez}\}$, so dass mindestens 20 Studierende x als Geburtstag feiern. Insbesondere gibt es 18 Menschen, die den gleichen Geburtstag feiern.

SKA 4·10

Behauptung 4·5 *Bezeichne mit $\Phi(n)$ die Aussage*

- *Für alle endlichen Mengen, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, gilt $|\prod_{i=1}^n E_i| = \prod_{i=1}^n |E_i|$.*

Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. $\diamondsuit$

Beweis. Wir zeigen dies per Induktion mit den Fällen $n \leqslant 2$ als Induktionsanfang.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann für alle Mengen, E_1

$$|\prod_{i=1}^1 E_i| \quad = \quad |E_1| \quad = \quad \prod_{i=1}^1 |E_i|$$

Also gilt $\Phi(1)$.

Sei $n = 2$. Laut Lemma 4·6 (siehe unten) gilt für alle endlichen Mengen E_1, E_2

$$|\prod_{i=1}^2 E_i| \quad = \quad |E_1 \times E_2| \quad = \quad |E_1| \cdot |E_2| \quad = \quad \prod_{i=1}^2 |E_i|.$$

Also gilt $\Phi(2)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 2$. Angenommen, $\Phi(n-1)$ gilt.

Induktionsschritt: Seien $E_1, E_2, \ldots, E_n$ beliebige endliche Mengen.
Zu zeigen: $|\prod_{i=1}^n E_i| = \prod_{i=1}^n |E_i|$ gilt.
Es gilt

$$\begin{array}{rcll} |\prod_{i=1}^n E_i| & = & |\prod_{i=1}^{n-1} E_i \times E_n| & \\ & = & |\prod_{i=1}^{n-1} E_i| \cdot |E_n|, & \text{da } \Phi(2) \text{ gilt} \\ & = & \prod_{i=1}^{n-1} |E_i| \cdot |E_n| & \text{wegen der IV} \\ & = & \prod_{i=1}^{n} |E_i|. & \end{array}$$

Also gilt $\Phi(n)$.

Also gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ■

Wir müssen noch den Fall für 2 Mengen beweisen.

Lemma 4·6 *Seien X, Y beliebige endliche Mengen. Dann $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.* ♢

Beweis. Wir zeigen dies direkt. Seien $m := |X|$ und $n := |Y|$. Wegen Endlichkeit liegen m, n in $\mathbb{N}_0$.

Falls $m = 0$ oder $n = 0$, so gilt $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ und damit

$$|X \times Y| \;=\; |\emptyset| \;=\; 0 \;=\; m \cdot n \;=\; |X| \cdot |Y|.$$

Beschränken wir uns also auf den Famm $m, n > 0$. Per Definition von Kardinalität (siehe [Sin20, §3.3, S.54]) existieren also Bijektionen

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \{0, 1, \ldots, m-1\} & \to & X, \\ g & : & \{0, 1, \ldots, n-1\} & \to & Y. \end{array}$$

(Wir fangen aus praktischen Gründen mit 0 statt 1 an.)
Definiere nun

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \{0, 1, \ldots, mn-1\} & \mapsto & X \times Y \\ & : & k & \mapsto & (f(\mathsf{mod}(k, m)), g([k/m])), \end{array}$$

wobei $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die Gaußklammerfunktion, die reelle Zahlen *abrundet*.
Zu zeigen: h ist eine wohldefinierte Bijektion.

Wohldefiniertheit: Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, mn-1\}$ gilt $i := \mathsf{mod}(k, m) \in \{0, 1, \ldots, m-1\} = \mathsf{dom}(f)$ und $j := [k/m] \in \{0, 1, \ldots, n-1\} = \mathsf{dom}(g)$, sodass $f(i) \in X$ und $g(j) \in Y$ und damit $h(k) = (f(i), g(j)) \in X \times Y$.

Injektivität: Seien $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, mn-1\}$ beliebig. **Zu zeigen:** $h(k_1) = h(k_2) \Rightarrow k_1 = k_2$.
Nach [Sin20, Satz 3.4.2] existieren (eindeutige) Werte $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ und $r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, so dass

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & mq_1 + r_1, \\ k_2 & = & mq_2 + r_2. \end{array} \tag{4·3}$$

Daraus lässt sich ableiten, dass $\mathsf{mod}(k_1, m) = r_1$, $\mathsf{mod}(k_2, m) = r_2$, $[k_1/m] = q_1$, und $[k_2/m] = q_2$. Darum gilt

$$\begin{array}{rcl} h(k_1) = h(k_2) & \overset{\mathsf{Defn}}{\Longleftrightarrow} & (f(r_1), g(q_1)) = (f(r_2), g(q_2)) \\ & \Longrightarrow & f(r_1) = f(r_2) \text{ und } g(q_1) = g(q_2) \\ & \Longrightarrow & r_1 = r_2 \text{ und } q_1 = q_2 \\ & & \text{da } f, g \text{ injektiv sind} \\ & \overset{(4·3)}{\Longrightarrow} & k_1 = mq_1 + r_1 = mq_2 + r_2 = k_2. \end{array}$$

Surjektivität: Sei $(x, y) \in X \times Y$. **Zu zeigen:** $(x, y) \in \mathsf{ran}(h)$.
Wegen der Surjektivität von f, g existieren nun $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ und $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, so dass $f(i) = x$ und $g(j) = y$.
Setze nun $k := mj + i$.
Dann $\mathsf{mod}(k, m) = i$ und $[k/m] = j$, sodass $h(k) = (f(i), g(j)) = (x, y)$.
Also gilt $(x, y) \in \mathsf{ran}(h)$.

Darum ist h ist eine wohldefinierte Bijektion, woraus sich per Definition von Kardinalität direkt ergibt, dass $|X \times Y| = mn = |X| \cdot |Y|$. ■

SKA 4·11

Um ein Argument zurückzuweisen, reicht es häufig aus, das Argument einfach *ausführlich* aufzuschreiben. Wir nehmen die Ausführung und formalisieren diese:

Behauptung. *Bezeichne mit $G(x)$, dass x ein Goldfisch ist. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit $\Phi(n)$ folgende Aussage*

- *Für alle n-elementigen Mengen, X, von Fischen, wenn $\exists x \in X : G(x)$, dann $\forall x \in X : G(x)$.*

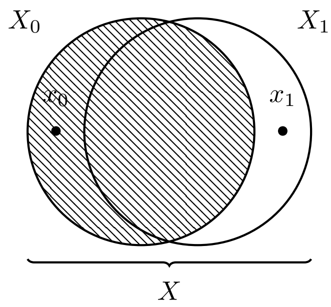
Dann $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$ ♢

Beweis (ungültiges Argument). Dies wird per Induktion argumentiert.

Induktionsanfang: Betrachte eine 1-elementige Menge, X, von Fischen.
Angenommen, ein $x_0 \in X$ mit $G(x_0)$ existiere.
Da X nur dieses eine Element enthält, gilt offensichtlich $\forall x \in X : G(x)$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 1$. Angenommen, $\Phi(n)$ gilt.

Induktionsschritt: Sei X eine $n+1$-elementige Menge von Fischen.
Angenommen, ein $x_0 \in X$ mit $G(x_0)$ existiere. **Zu zeigen:** Für alle $x \in X$ gilt $G(x)$.
Fixiere einen anderen Fisch $x_1 \in X \backslash \{x_0\}$, was möglich ist, weil $|X| = n + 1 \geqslant 2$.
Setze $X_0 := X \backslash \{x_1\}$ und $X_1 := X \backslash \{x_0\}$.
Da $x_1 \neq x_0$, sind X_0, X_1 verschiedene n-elementige Mengen:



Fokussieren wir uns zunächst auf X_0 (die schattierte Teilmenge).
Da X_0 n-elementig ist und $x_0 \in X_0$ und $G(x_0)$, gilt per IV (†) $\forall x \in X_0 : G(x)$.

Wähle nun irgendeinen der Fische, $\tilde{x} \in X_0$ und setze $X' := X \backslash \{\tilde{x}\}$.
O. E. können wir $\tilde{x} := x_0$ wählen, sodass $X' = X_1$ gilt.
Die Teilmenge X_1 ist nun eine n-elementige Menge mit mindestens $n - 1$ Goldfischen.
$\boxed{\text{Also } \exists x \in X_1 : G(x).}$
Per IV gilt also $\forall x \in X_1 : G(x)$.
Daraus und aus (†) folgt $\forall x \in X : G(x)$, da ja $X = X_0 \cup X_1$.

Darum gilt $\Phi(n+1)$.

Darum gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \Phi(n)$. ■

Das Problem mit diesem Argument steckt im Induktionsschritt an genau dieser Stelle:

> *Also* $\exists x \in X' : G(x)$.

Im ursprünglichen Text ist dies die problematische Stelle:

> *Jetzt können wir aber auch einen der Goldfische rausnehmen und haben wieder ein Aquarium mit n Fischen und mindestens einem Goldfisch.*

Zurück aber zu unserer Formalisierung:
Wir haben etwas ausführlicher gezeigt, dass die Menge X' mindestens $n-1$ Goldfische enthält. Wenn wir $\tilde{x} := x_0$ wählen entspricht dies der Größe des Schnitts $X_0 \cap X_1$. Das Diagramm mag andeuten, dass dieser Schnitt nicht leer ist, aber das Diagramm täuscht. Im Induktionsschritt setzen wir nur voraus, dass $n \geqslant 1$. Darum ist $n - 1 > 0$ nur garantiert, wenn stattdessen $n' \geqslant 2$ vorausgesetzt wird.

Das heißt das Induktionsargument ist faul, weil der Schritt $1 \rightsquigarrow 2$ implizit übersprungen wird.

SKA Blatt 5

Woche 5

SKA 5.2

Betrachtet sei die Teilbarkeitsrelation $(\mathbb{Z}, |)$. Wir prüfen, welche Axiome erfüllt sind und beurteilen aufgrund dessen, ob es sich um eine Äquivalenzrelation, partielle Ordnung, Abbildung, usw. handelt.

Reflexivität: Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. **Zu prüfen:** $a \mid a$?
Es gilt $a = 1 \cdot a$ und $1 \in \mathbb{Z}$.
Darum gilt $a \mid a$.
Also ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{reflexiv}}$.

Symmetrie: Betrachte bspw. $2, 10 \in \mathbb{Z}$.
Es gilt $2 \mid 10$ aber $10 \nmid 2$.
Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{nicht symmetrisch}}$.

Antisymmetrie: Betrachte bspw. $2, -2 \in \mathbb{Z}$.
Es gelten $2 \mid -2$ und $-2 \mid 2$, aber $2 \neq -2$.
Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{nicht antisymmetrisch}}$.

Transitivität: Seien, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. **Zu prüfen:** $(a \mid b$ und $b \mid c) \Rightarrow a \mid c$?
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
a \mid b \,\text{und}\, b \mid c &\iff \exists k, j \in \mathbb{Z} : c = kb,\, b = ja \\
&\implies \exists k, j \in \mathbb{Z} : c = (kj)a \\
&\implies \exists m \in \mathbb{Z} : c = ma \\
&\iff a \mid c.
\end{aligned}
$$

Also ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{transitiv}}$.

Totalität: Betrachte bspw. $5, 7 \in \mathbb{Z}$.
Dann $5 \nmid 7$, $7 \nmid 5$, und $5 \neq 7$.
Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{nicht total}}$.

Linkstotalität: Sei $a \in \mathbb{Z}$. **Zu prüfen:** $\exists b \in \mathbb{Z} : a \mid b$?
Wegen Reflexivität gilt nun $a \mid a$.
Also ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{linkstotal}}$.

Rechtseindeutigkeit: Betrachte bspw. $2, 10, 100 \in \mathbb{Z}$.
Es gilt $2 \mid 10$ und $2 \mid 100$, aber $10 \neq 100$.
Darum ist $(\mathbb{Z}, |)$ $\boxed{\text{nicht rechtseindeutig}}$.

Daraus folgt, dass $(\mathbb{Z}, |)$ weder eine Äquivalenzrelation noch eine (lineare) Ordnungsrelation noch eine partielle Ordnungsrelation ist. Und es gibt keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{Gph}(f) = |$.

Bemerkung: Man kann aber zeigen, das die Beschränkungen $(\mathbb{N}_0, |)$ und $(\mathbb{N}, |)$ zusätzlich Antisymmetrie aufweisen, sodass diese partielle Ordnungsrelationen sind.

SKA 5·3

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b > 0$. Um a durch b (mit Rest) zu teilen, setzt man

$$\begin{array}{rcl} q & := & [a/b] \in \mathbb{Z} \\ r & := & a - b \cdot q \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

wobei $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die Gaußklammerfunktion ist, die reelle Zahlen *abrundet*. Per Definition gilt

$$q \leqslant a/b < q + 1$$

also

$$0 \leqslant a - b \cdot q < b$$

Darum $r \in \{0, 1, \ldots, b - 1\}$.

Um dies aber *per Hand* bzw. im Kopf zu machen, verwendet man iterative Algorithmen, die aus Schritten besteht: a und b durch »einfachere« Zahlen ersetzen; mit einfacheren Zahlen teilen; Nachjustieren.

Welche Methode auch immer man anwendet hat dies mit $\boxed{\text{dem Existenz-Teil}}$ des Beweises zu tun.

SKA 5·4

Behauptung 5·1 *Es gilt*

(i) ggT(a, b) = ggT(b, a)*;*

(ii) ggT(a, b) = ggT$(|a|, |b|)$*;*

(iii) ggT$(a, 0)$ = ggT$(0, a) = |a|$*, solange* $a \neq 0$*;*

(iv) ggT$(ca, cb) = |c|$ ggT(a, b)*, solange* $b, c \neq 0$*;*

für $a, b, c \in \mathbb{Z}$. ◊

Beweis. **(i):** Es gilt ggT$(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a, b\} = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid b, a\}$ = ggT(b, a).

(ii): Sei $d, x \in \mathbb{Z}$. Dann ist es einfach zu sehen, dass $d \mid x \Leftrightarrow d \mid |x|$.
Darum gilt ggT$(a, b) = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a, b\} = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid |a|, |b|\}$ = ggT$(|a|, |b|)$.

(iii): Laut (i) reicht es aus **zu zeigen** ggT$(a, 0) = |a|$.
Es gilt ggT$(a, 0) = \max D$, wobei $D := \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a, 0\}$.
(I) Setze $d_0 := |a|$. Offensichtlich gilt $d_0 \mid a, 0$.
(II) Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt $d \mid a \Rightarrow |\frac{a}{d}| \geqslant 1 \Rightarrow d \leqslant |a| = d_0$.
(III) Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt $d \mid 0$.
Zusammengefasst,

$$d_0 \overset{\text{(I)}}{\in} D \overset{\text{(III)}}{=} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a\} \overset{\text{(II)}}{\subseteq} \{d \in \mathbb{N} \mid d \leqslant d_0$$

woraus sich ergibt, dass $d_0 \leqslant \max D \leqslant d_0$. Also ggT$(a, 0) = \max D = d_0 = |a|$.

(iv): Setze $d_1 :=$ ggT(a, b) und $d_2 :=$ ggT(ca, cb). **Zu zeigen:** $d_2 = |c| d_1$.
Wir zeigen dies durch zwei Ungleichungen.
Es gilt

$$\begin{array}{rcl} d_1 \mid a, b & \Longleftrightarrow & \exists k, j \in \mathbb{Z} a = kd_1 \text{ und } b = jd_1 \\ & \Longleftrightarrow & \exists k, j \in \mathbb{Z} ca = kcd_1 \text{ und } cb = jcd_1 \\ & \Longleftrightarrow & \exists k, j \in \mathbb{Z} ca = k|c|d_1 \text{ und } cb = j|c|d_1 \\ & & \text{da manz. B. } k \text{ durch } -k \text{ ersetzen kann} \\ & \Longleftrightarrow & |c|d_1 \mid ca, cb \end{array}$$

Per Maximalität von d_2 unter den positiven Teilern, folgt $\boxed{|c|d_1 \leqslant d_2}$.
Andererseits existieren nach dem *Lemma von Bézout* $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass

$$d_1 = \text{ggT}(a, b) = ua + vb$$

woraus sich ergibt, dass

$$\frac{|c|d_1}{d_2} = \underbrace{\pm u\frac{ca}{d_2} + \pm v\frac{cb}{d_2}}_{=:w} \tag{5·1}$$

Da $d_2 \mid ca, cb$ ist die rechte Seite von (5·1) in $\mathbb{Z}$. Und da $|c|, d_1, d_2 > 0$, ist die linke Seite von (5·1) strikt positiv, sodass $w \geqslant 1$ gilt. Darum $\boxed{|c|d_1 = w \cdot d_2 \geqslant 1 \cdot d_2}$. ■

Bemerkung. Ohne das *Lemma von Bézout* ist ein Beweis vom Letzten Punkt praktisch unmachbar.

SKA 5·5

Seien $a = 57$ und $b = 21$. Dann gilt $a = qb + r$, wobei $q = 2$ und $\boxed{r = 15}$. Es gilt ggT$(a, b) = 3$[a] und ggT$(b, r) = 3$[b] Also gilt ggT$(a, b) =$ ggT$(b,$ mod$(a, b))$, genau wie [Sin20, Lemma 3.4.5] allgemein besagt.

SKA 5·6

Für jeden Fall berechnen wir ggT(a, b) mittels des Euklidischen Algorithmus (siehe [Sin20, Satz 3.4.7]).

a	b	Restberechnung (symbolisch)	Restberechnung (Werte)
1529	170	$a = b \cdot q_1 + r_1$	$1529 = 170 \cdot 8 + 169$
		$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$170 = 169 \cdot 1 + \boxed{1}$
		$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$169 = 1 \cdot 169 + 0$
13758	21	$a = b \cdot q_1 + r_1$	$13758 = 21 \cdot 655 + \boxed{3}$
		$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$21 = 3 \cdot 7 + 0$
210	45	$a = b \cdot q_1 + r_1$	$210 = 45 \cdot 4 + 30$
		$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$45 = 30 \cdot 1 + \boxed{15}$
		$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$30 = 15 \cdot 2 + 0$
1209	102	$a = b \cdot q_1 + r_1$	$1209 = 102 \cdot 11 + 87$
		$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$	$102 = 87 \cdot 1 + 15$
		$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$87 = 15 \cdot 5 + 12$
		$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$	$15 = 12 \cdot 1 + \boxed{3}$
		$r_3 = r_4 \cdot q_5 + r_5$	$12 = 3 \cdot 4 + 0$

SKA 5·7

SKA 5·8

Das Lemma von Bézout wird mittels des $\boxed{\text{Euklidischen Algorithmus}}$ bewiesen.
Korollar 3.4.10 baut darauf und charakterisiert, wann zwei Zahlen teilerfremd sind.
Lemma 3.4.12 baut darauf und zeigt $\forall i : b, a_i$ teilerfremd $\Rightarrow b, \prod_{i=1}^{n} a$ teilerfremd.
Satz 3.4.14 baut darauf und zeigt $p \mid \prod_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow \exists i : p \mid a_i$ für p prim.

Dieses letzte Ergebnis wird im Induktionsargument instrumentalisiert, um Primzerlegungen der Länge k, l auf Primfaktorzerlegungen der Länge $k-1, l-1$ zu reduzieren, um das Induktionsargument voranzubringen.

Bemerkung 5·2 In der Algebra gibt es zwei Begriffe, die bei gewöhnlichen Primzahlen, sich anwenden lassen: *Irriduzibilität* und *prim*. Die Definition in abstrakten Kontexten von *prim* entspricht der Eigenschaft in [Sin20, Satz 3.4.14], während *Irriduzibilität* eher sich auf die Teilbarkeit bezieht. Etwas »Zufälligerweise« handelt es sich bei $\mathbb{Z}$ um eine Art von Struktur, in der diese zwei Konzepte zusammenfallen. Wie in fast allen technischen Bereichen sollte man auf solche »Zufälligkeiten« achten: Irgendwann befindet man sich in einer Situation,

[a] weil $r = 3 \cdot 5$ und $3, 5 \in \mathbb{P}$ und nur $3 \mid 57$ gilt.
[b] weil $r = 3 \cdot 5$ und $3, 5 \in \mathbb{P}$ und nur $3 \mid 21$ gilt.

wo man feiner unterscheiden muss und es nicht mehr selbstverständlich ist, zwei Konzepte als identisch zu behandeln. ◊

SKA 5·10

Siehe [Sin20, Satz 3.5.1]. Hier eine Alternative:
Für $r = 0$ setze man $q_r := 1$ und $p_r := 0$. Und für alle anderen rationalen Zahlen, $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, wähle

$$\begin{aligned} q_r &:= \min \overbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid q_r \cdot r \in \mathbb{Z}\}}^{D(r)} \in \mathbb{N} \\ p_r &:= q_r \cdot r \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Da r ration ist, ist $D(r)$ per Definition nicht leer. Darum ist die Wahl von q_r und p_r wohldefiniert und per Konstruktion gilt $p_r/q_r = r$. (Für $r = 0$ gilt ebenfalls offensichtlich $p_r/q_r = r$.) Damit haben wir die Existenz einer kanonischen Darstellung begründet.

Stimmt dies mit der Konstruktion im [Sin20, Satz 3.5.1] überein?

Für $r = 0$ gilt offensichtlich $\text{ggT}(p_r, q_r) = 1$. Für $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ gilt $d := \text{ggT}(p_r, q_r) = 1$, denn sonst wäre $\frac{q_r}{d}$ eine positive natürliche Zahl in $D(r)$, da $\frac{q_r}{d} \cdot r = \frac{q_r \cdot r}{d} = \frac{p_r}{d} \in \mathbb{Z}$, während $\frac{q_r}{d} < q_r$ (strikt), was ein Widerspruch zur Minimalität ist. Darum entspricht unserer Darstellung der im [Sin20, Satz 3.5.1].

SKA 5·12

Behauptung (vgl. [Sin20, Satz 3.5.3]). *Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Dann $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = p$.* ◊

Beweis. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann existieren $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{a}{b})^2 = p$. Wir konstruieren nun per Rekursion eine Folge $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $(\frac{a_n}{b_n})^2 = p$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt monoton absteigend ist:

- Setze $a_0 := a$ und $b_0 = b$. Offensichtlich gilt per Wahl $(\frac{a_n}{b_n})^2 = p$.
- Sei $n > 0$. Angenommen, wir haben bereits $((a_k, b_k))_{k=0}^{n-1}$ konstruiert. Aus $(\frac{a_n}{b_n})^2 = p$ folgt nun $a_n^2 = pb_n^2$. Daraus folgt $p \mid a_n \cdot a_n$ und damit gilt (vgl. [Sin20, Satz 3.4.14]) $p \mid a_n$, weil p prim ist. Da $b_n^2 = p \cdot (\frac{a_n}{p})^2$ und da $\frac{a_n}{p} \in \mathbb{Z}$, erhalten wir ebenfalls $p \mid b_n \cdot b_n$ und wiederum $p \mid b_n$.

  Setze also $a_{n+1} := \frac{a_n}{p}$ und $b_{n+1} := \frac{b_n}{p}$. Dann wie oben gezeigt wurde, gilt $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ und $b_{n+1} \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})^2 = (\frac{a_n}{b_n})^2 = p$. Und, da $p > 1$, gilt $b_{n+1} < b_n$.

Darum funktioniert die rekursive Konstruktion. Da nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ eine strikt monoton absteigende Folge ist, haben wir einen Widerspruch erreicht, weil $(\mathbb{N}, \leqslant)$ eine Wohlordnungsrelation ist. ■

SKA 5·13

Behauptung (vgl. [Sin20, Satz 3.5.5]). *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Dann existiert eine Nullstelle von $ax^2 + bx + c$ gdw. $\Delta \geqslant 0$, wobei $\Delta := b^2 - 4ac$.* ◊

Beweis. Zunächst berechnen wir eine Umformung: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff 4a(ax^2 + bx + c) = 0 \quad \text{da } a \neq 0 \\ &\iff (2ax)^2 + 2b(2ax) + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\iff (2ax + b)^2 = \Delta. \end{aligned} \tag{5·2}$$

Falls $\Delta \geqslant 0$, so existiert ein $\sqrt{\Delta} \geqslant 0$ mit $\sqrt{\Delta}^2 = \Delta$. Darum gilt

$$ax^2 + bx + c = 0 \overset{(5\cdot2)}{\iff} (2ax + b)^2 = \Delta \iff 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \iff x = \tfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das heißt, falls $\Delta \geqslant 0$, hat das Polynom reellwertige Nullstellen, und zwar sind die Nullstellen durch $\{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\}$ gegeben.

Falls $\Delta < 0$, so existieren keine Nullstellen. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Fixiere eine Lösung

$x \in \mathbb{R}$ und setze $\alpha := 2ax + b \in \mathbb{R}$. Aus (5·2) folgt nun $\Delta = \alpha^2$. Aber $\alpha^2 \geqslant 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dies ist ein Widerspruch. ■

SKA 5·14

Die Gruppe von Bijektionen von $\{1, 2\}$ auf $\{1, 2\}$ entspricht der Permutationsgruppe S_2. Dies hat $2! = 2$ Elemente:

$$\begin{aligned} e &:= \text{Funktion, die alles fixiert} \\ (1\,2) &:= \text{Funktion, die } 1 \text{ und } 2 \text{ tauscht} \end{aligned}$$

Die Gruppentafel sieht folgendermaßen aus:

		h	
	gh	e	$(1\,2)$
g	e	e	$(1\,2)$
	$(1\,2)$	$(1\,2)$	e

Die Gruppe von Bijektionen von $\{1, 2, 3\}$ auf $\{1, 2, 3\}$ entspricht der Permutationsgruppe S_3. Dies hat $3! = 6$ Elemente:

$$\begin{aligned} e &:= \text{Funktion, die alles fixiert} \\ (1\,2) &:= \text{Funktion, die } 1 \text{ und } 2 \text{ tauscht} \\ (1\,3) &:= \text{Funktion, die } 1 \text{ und } 3 \text{ tauscht} \\ (2\,3) &:= \text{Funktion, die } 2 \text{ und } 3 \text{ tauscht} \\ (1\,2\,3) &:= \text{Funktion, die } 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1 \text{ abbildet} \\ (1\,3\,2) &:= \text{Funktion, die } 1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \text{ abbildet} \end{aligned}$$

Die Gruppentafel sieht folgendermaßen aus:

(*Unter Arbeit*)

SKA 5·15

Die erste Gruppe, S_2, ist kommutativ (»abelsch«). Das lässt sich daran erkennen, dass die Tafel symmetrisch ist.

Die zweite Gruppe, S_3, ist kommutativ (»abelsch«). Das lässt sich daran erkennen, dass die Tafel nicht symmetrisch ist.

TEIL III
Quizzes

Quiz 1

Woche 1

Behauptung. *Das LGS*

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & a \cdot y & = & 3 \\ a \cdot x & - & 4y & = & 0 \end{array}$$

ist genau dann lösbar, wenn $a \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 2\}$. $\Diamond$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir führen das Gaußverfahren aus:

Ursprüngliches LGS $(A_\alpha | b_\beta)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & a & 3 \\ a & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Wende die Zeilentransformationen $Z_2 \leftsquigarrow a \cdot Z_1 + Z_2$ an:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & a^2 - 4 & 3a \end{array}\right)$$

Wenn $a \in \{\pm 2\}$, ist das LGS unlösbar, da in der 2. Zeile links nur 0 Einträge stehen und rechts ± 6.
Wenn $a \notin \{\pm 2\}$, gibt es zwei Stufen und damit ist das LGS lösbar.
Also gilt die Behauptung. ■

Quiz 2

Woche 2

Sei L die Gerade $\{\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei

$$\mathbf{v} \quad = \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(1) Behauptung. *Der Punkt,* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$, *liegt in der Geraden,* L. ◊

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in L \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \mathbf{v} + t\mathbf{w} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} - \mathbf{v} = t\mathbf{w} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun ist die letzte Aussage wahr, da der Ausdruck innerhalb des Existenzquantors offensichtlich unter $t = \frac{1}{2}$ wahr ist. Darum gilt $\mathbf{x} \in L$. ■

(2) Fixiere einen Vektor, $\mathbf{w}_\perp \in \mathbb{R}^3$, der zu $\mathbf{w}$ normal ist. Z. B. können wir

$$\mathbf{w}_\perp \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Dann gilt $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}_\perp \rangle = 0$, sodass die Vektoren normal zueinander stehen.

Nun, für $\mathbf{x} \in L$ setze

$$L_\mathbf{x} \quad := \quad \{\mathbf{x} + s \cdot \mathbf{w}_\perp \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Dann gilt offensichtlich $\mathbf{x} \in L \cap L_\mathbf{x}$.
Andererseits, da die Richtungsvektoren in den Geraden nicht linear abhängig sind, (da sie normal zueinander stehen), gilt $|L \cap L_\mathbf{x}| \leqslant 1$.
Darum gilt $L \cap L_\mathbf{x} = \{\mathbf{x}\}$.

Quiz 3

Woche 3

(a) Behauptung. *Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Sei $B \subseteq Y$ beliebig. Dann gilt $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$. Insbesondere gilt $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$* $\Diamond$

Beweis. Für $y \in Y$ gilt

$$
\begin{aligned}
y \in f(f^{-1}(B)) &\iff \exists x \in f^{-1}(B) : f(x) = y \\
&\iff \exists x : (x \in f^{-1}(B) \text{ und } f(x) = y) \\
&\iff \exists x : (x \in X \text{ und } f(x) \in B \text{ und } f(x) = y) \\
&\iff \exists x \in X : (f(x) \in B \text{ und } f(x) = y) \\
&\iff \exists x \in X : (y = f(x) \text{ und } y \in B) \\
&\iff (\exists x \in X : y = f(x)) \text{ und } y \in B \\
&\iff y \in f(X) \text{ und } y \in B \\
&\iff y \in f(X) \cap B.
\end{aligned}
$$

Darum gilt $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subseteq B$. ■

(b) Aus (a) folgt:

- f surjektiv $\implies f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B = Y \cap B = B$ für alle $B \subseteq Y$;
- f nicht surjektiv $\implies f(f^{-1}(Y)) = f(X) \cap Y = f(X) \subset Y$ (strikt).

Darum ist es notwendig und hinreichend, eine nicht-surjektive Funktion als Beispiel zu nehmen. Hier ein minimales Beispiel $X = \{0\}$ und $Y = \{1, 2\}$ und $B = Y$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(0) = 1$. Dann $f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(Y)) = f(X) = \{1\} \subset Y$ (strikt).

Literaturverzeichnis

[EFT18] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. 2018.

[Jec97] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, 1997.

[Sin20] Rainer Sinn. Lineare Algebra I: Skript zur Veranstaltung Universität Leipzig. Vorlesungsskript, 2020.

[Wal16] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.