Aufgabe 5 (Klausur$_2$, WiSe 2020/2021)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper, K. Gegeben ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Aufgabe 5a

Behauptung. $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$. $\Diamond$

Es gibt hierfür ein paar Ansätze. Zuerst der direkte Ansatz:

Ansatz I. Zu zeigen:

(i) triviale Inklusion: $\{\mathbf{0}\} \subseteq \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)$;

(ii) nichttriviale Inklusion: $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) \subseteq \{\mathbf{0}\}$.

Zu (i): Da $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$ Untervektorräume sind, liegt der Nullvektor in beiden und somit im Schnitt.

Zu (ii): Sei v ein Vektor im Schnitt. Wir müssen zeigen, dass $v = \mathbf{0}$.
Aus $v \in \text{Bild}(\varphi)$ folgt $v = \varphi(w)$ für ein $w \in V$.
Da auch $v \in \text{Kern}(\varphi)$, erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} v & = & \varphi(w) & \text{per Wahl von } w \\ & = & \varphi(\varphi(w)) & \text{da per Annahme } \varphi \circ \varphi = \varphi \\ & = & \varphi(v) & \text{per Wahl von } w \\ & = & \mathbf{0} & \text{da } v \in \text{Kern}(\varphi). \end{array}$$

Also gelten (i) + (ii), woraus sich die behauptete Gleichung ergibt. ■

Für die folgenden Ansätze benutzen wir das Resultat aus (b).
ACHTUNG: Dafür aber dürfen wir später (b) das Ergebnis aus (a) nicht verwenden, denn sonst wäre dies ein **Zirkelschluss**.

Ansatz II. Laut (b) gilt $(*)$ $V = \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$.
Fixiere die Untervektorräume, $U_1 := \text{Kern}(\varphi)$ und $U_2 := \text{Bild}(\varphi)$, von V.
Laut der *Dimensionsformel für lineare Abbildungen* gilt:

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)). \tag{5·1}$$

Aus $(*)$ und der *Dimensionsformel für Untervektorräume* und da V endlich dimensional ist, erhalten wir außerdem:

$$\begin{array}{rcl} \dim(V) & = & \dim(\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)) \\ & = & \dim(U_1 + U_2) \\ & = & \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \\ & = & \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)) - \dim(\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)). \end{array} \tag{5·2}$$

Da all diese Zahlen endlich sind, folgt aus (5·1) und (5·2), dass $\dim(\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)) = 0$.
Da $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V ist und 0-dimensional ist, gilt $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$. ■

Ansatz III. Laut (b) gilt $V = \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$.
Fixiere die Untervektorräume, $U_1 := \text{Kern}(\varphi)$ und $U_2 := \text{Bild}(\varphi)$, von V. Auf U_1 verhält sich φ wie $\mathbf{0}$ (die Nullabbildung) und auf U_2 verhält sich φ wie $\mathbf{I}$ (die Identitätsabbildung), weil $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Für $x \in \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)$ gilt $x \in U_1 \cap U_2$. Da sich φ wie die Null- bzw. Identitätsabbildung auf U_1 bzw. U_2 verhält, gilt $x = \mathbf{I}(x) = \varphi(x) = \mathbf{0}(x) = \mathbf{0}$. Also $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) \subseteq \{\mathbf{0}\}$. Da außerdem $\mathbf{0}$ in allen Untervektorräumen liegt, erhalten wir $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$. ■

NOTENSCHEMA	
Punkte	Beschreibung
5	Argument vollständig (=ausführlich) und logisch gültig.
4	Nichttriviale Inklusion wurde vollständig bewiesen, aber die triviale Inklusion fehlte.
4	Ansatz II/III gemacht aber fehlte zu erwähnen, dass V endlich dimensional.
3	Triviale Inklusion bewiesen und nichttriviale Inklusion lückenhaft (aber richtig) bewiesen.
3	Argument baut auf falscher Annahme auf, aber Annahme „rechtfertigt".
3	Ansatz II/III gemacht, aber mehrere lücken.
2	Nur triviale Inklusion bewiesen.
2	Argument baut auf falscher Annahme auf und Annahme kaum rechtfertigt.
0	sonst.

Bemerkungen. Da es sich hier um die Bewertung von Argumentationen handelt, kann man in Wirklichkeit kein Schema festlegen. Stattdessen musste über die Qualität Urteile getroffen werden. In erster Linie kriegt man volle Punkte, wenn man vollständig (idealerweise auch ausführlich) + gültig + überzeugend argumentierte. Ab dann wurden anhand unterschiedlicher Defizite empirische Graduierungen implementiert. Wegen wichtiger Lücken wurden Punkte abgezogen. Wenn man auf einer falschen Annahme aufbaute (z. B. φ sei injektiv/bijektiv od. $\varphi = \mathbf{I}$ od. in Ansatz III eine falsche Dichotomie) war entscheiden, ob man zumindest versuchte, die falsche Annahme zu rechtfertigen. Wenn man auf einer falschen Annahme das Argument aufbaute und diese Annahme alles trivial machen ließ und diese Annahme nicht genügend rechtfertigte, dann resultierte dies in 0 Punkten. Wenn man Ansatz II/III implementierte aber im (b) mit dem Ergebnis aus (a) argumentierte, war dies ein Kreisargument und somit wurden auch Punkte abgezogen.

Aufgabe 5b

Behauptung. *Es gilt* $V = \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$. $\Diamond$

Es gab hier grundsätzlich zwei Ansätze:

Ansatz I. **Zu zeigen:**

(i) triviale Inklusion: $\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi) \subseteq V$;

(ii) nichttriviale Inklusion: $V \subseteq \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$.

Zu (i): Da $\text{Kern}(\varphi), \text{Bild}(\varphi) \subseteq V$ und V unter Addition abgeschlossen ist, gilt $\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi) \subseteq V$. (Alternative: die Summe aus Untervektorräumen ist i. A. ein Untervektorraum.)

Zu (ii): Sei $v \in V$ beliebig. Beachte zunächst, dass $v - \varphi(v) \in \text{Kern}(\varphi)$, da

$$\varphi(v - \varphi(v)) \quad = \quad \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) \quad \overset{(*)}{=} \quad \varphi(v) - \varphi(v).$$

wobei $(*)$ wegen der Hauptannahme $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt. Daraus folgt

$$v \quad = \quad \underbrace{(v - \varphi(v))}_{\in \text{Kern}(\varphi)} + \underbrace{\varphi(v)}_{\in \text{Bild}(\varphi)} \quad \in \quad \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi).$$

Also gelten (i) + (ii), woraus sich die behauptete Gleichung ergibt.

Ansatz II. Da $U_1 := \text{Kern}(\varphi), U_2 := \text{Bild}(\varphi) \subseteq V$ und damit auch $\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi) \subseteq V$ Untervektorräume sind, und da V endlich dimensional ist, reicht es auch **zu zeigen**, dass

$$\dim(\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)) \quad = \quad \dim(V). \tag{5·3}$$

Laut der *Dimensionsformel für lineare Abbildungen* gilt:

$$\dim(V) \quad = \quad \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)). \tag{5·4}$$

Laut der *Dimensionsformel für Untervektorräume* gilt außerdem:

$$\begin{aligned} \dim(\text{Kern}(\varphi)) + \dim(\text{Bild}(\varphi)) &= \dim(U_1) + \dim(U_2) \\ &= \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) \\ &= \dim(\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)) \\ &\qquad + \dim(\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi)) \\ &\overset{(*)}{=} \dim(\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)) + 0, \end{aligned} \tag{5·5}$$

wobei $(*)$ gilt, weil laut A5 a) $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ ein 0-dimensionaler Untervektorraum ist. Aus (5·4) + (5·5) folgt nun (5·3).

Also stimmt die Dimension des Untervektorraums, $\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$, mit der des endlichdimensionalen Vektorraums, V, überein. Wie oben erzählt folgt daraus: $\text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi) = V$. $\blacksquare$

NOTENSCHEMA

Punkte	Beschreibung
5	Argument vollständig (=ausführlich) und logisch gültig.
4	Ansatz I: Nichttriviale Inklusion vollständig, aber triviale fehlte.
4	Ansatz II: Argument vollständig aber eine Lücke, z. B. man benutzt die Annahme der Endlichdimensionalität von V nicht.
4	Ansatz I/II: Argument vollständig kleine Fehler.
3	Ein paar Lücken/Fehler, aber generell überzeugend.
3	Argument baut auf falscher Annahme auf, aber Annahme „rechtfertigt“.
2	Nur triviale Inklusion bewiesen.
2	Argument baut auf falscher Annahme auf und Annahme kaum rechtfertigt.
1	Man fing mit ein paar richtigen Schritt von einem Ansatz an aber es fehlte der Rest.
0	sonst.

Bemerkungen. Auf folgende Qualitätsmerkmale wurde geschaut: Wichtig war, dass der ganze Text aus (a) + (b) eine kohärente Erzählung bildete. Bezeichnungen und Ausdrücke mussten sinnvoll sein. Man darf Symbole nicht willkürlich hinschreiben. Es darf keine Kreisschlüsse oder sonstige logische Täuschungen geben. Es darf nicht sein, dass dem Text zu entnehmen ist, dann man sich seiner eigenen Argumentation nicht bewusst ist. In der gesamten Aufgabe musste die Hauptannahme der Aufgabe (in diesem Falle $\varphi \circ \varphi = \varphi$) gebraucht (oder zumindest angesprochen) werden.