Lineare Algebra I

Zusatzaufgaben aus der Übungsgruppe

Raj Dahya
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig.
Wintersemester 2020/2021

Vorwort

Dieses Dokument enthält zusätzliche Aufgaben und Themen, die in den Übungsgruppen erörtert wurden.

Inhaltsverzeichnis

1

Lineare Ausdehnung

In der Übungsgruppe in Woche 12 (am 3.2.2021) diskutierten wir verzwickte Situationen und Fragentypen, die zum Thema linearer Ausdehnung vorkommen können. Wir hatten das größtenteils theoretisch ausgelegt. Hier wollen wir ein paar Aufgaben komplett durchrechnen.

Beachte! Hier geht es niemals darum, eine lineare Ausdehnung *exmplizit darzustellen*, sondern vielmehr (1) [Sin20, Satz 6.1.13] als zentrales Resultat anzuwenden, (2) eine Basis aus den Inputvektoren zu generieren (ggf. durch Entfernung von „linear abhängigen" Vektoren, ggf. durch Basiserweiterung, ggf. durch beides!) (3) die Input und Outputvektoren in der partielldefinierten Funktion zu untersuchen, und rein aufgrund dessen ein Urteil zu treffen, ob (3a) eine lineare Ausdehnung überhaupt möglich ist, (3b) eine injektive/nicht injektive lineare Ausdehnung möglich ist, (3c) eine surjektive/nicht surjektive lineare Ausdehnung möglich ist, (3d) eine Isomorphismus (=Bijektion)/nicht-Isomorphismus als lineare Ausdehnung möglich ist.

Nun, im Falle von Funktionen $\varphi : U \to V$, wobei U, V Vektorräume mit $\dim(U) = \dim(V)$, sind wegen [Sin20, Korollar 6.1.11] die Nebenfragen (3a)–(3c) alle äquivalent. Im Falle $\dim(U) \neq \dim(V)$ machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch:

Beobachtung. Seien U, V (endlich dimensionale) Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : U \to V$ linear. Da $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq V$ gilt offensichtlich $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \leqslant \dim(V)$. Und wenn wir eine Basis $\{u_1, u_2 \ldots, u_n\} \subseteq U$ für U fixieren, mit $n = \dim(U)$, so gilt wegen Linearität $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2) \ldots, \varphi(u_n)\}$. Das heißt, $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2) \ldots, \varphi(u_n)\}$ ist ein Erzeugendensystem für $\mathrm{Bild}(\varphi)$. Folglich gilt $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \leqslant n = \dim(U)$. Da per Definition $\mathrm{Rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$, haben wir gezeigt, dass $\mathrm{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(V)$ und $\mathrm{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(U)$ stets gelten. Kürzer formuliert:

$$\mathrm{Rang}(\varphi) \quad \leqslant \quad \min\{\dim(U), \dim(V)\} \tag{1·1}$$

gilt immer für alle lineare Abbildungen $\varphi : U \to V$ und alle Vektorräume U, V. ◊

Aus dieser Beobachtung können wir über (3b–3d) folgende Urteile generell treffen, wenn $\dim(U) \neq \dim(V)$:

- Falls $\dim(U) > \dim(V)$ kann es bei offensichtlich höchstens nicht-injektive lineare Ausdehnungen geben, weil für $\varphi : U \to V$ linear gilt $\mathrm{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(V) < \dim(U)$, sodass laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] φ niemals injektiv sein kann.

  Darum lautet die Antwort zu (3b/3d) *Gibt es injektive/bijektive...?* immer nein. Die Fragen (3b/3d) *Gibt es nicht-injektive/nicht-bijektive...?* sind dann äquivalent zu (3a).

- Falls $\dim(U) < \dim(V)$ kann es bei (3c) offensichtlich höchstens nicht-surjektive lineare Ausdehnungen geben, weil für $\varphi : U \to V$ linear gilt $\mathrm{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(U) < \dim(V)$, sodass laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] φ niemals surjektiv sein kann.

  Darum lautet die Antwort zu (3c/3d) *Gibt es surjektive/bijektive...?* immer nein. Die Fragen (3b/3d) *Gibt es nicht-surjektive/nicht-bijektive...?* sind dann äquivalent zu (3a).

Daher können wir die Fragentypen in den Aufgaben immer teilweise sofort beantworten und zum Teil vereinfachen, je nachdem, ob $\dim(U) = \dim(V)$, oder $\dim(U) < \dim(V)$, oder $\dim(U) > \dim(V)$ gelten.

Aufgabe 1·1

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U := \mathbb{R}^4$ und $V := \mathbb{R}^2$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -140 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·1 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig sind[a] und dass $u_3 \in \text{Lin}\{u_{1,2}\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$. Wir beachten auch, dass

$$10v_2 - 10v_1 = \begin{pmatrix} -140 \\ 30 \end{pmatrix} = v_3$$

gilt. Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren: existiert eine lineare Abbildung, die i) + ii) erfüllt, dann wird wegen Linearität Bedingung iii) automatisch mit erfüllt. Existiert keine lineare Abbildung, die i) + ii) erfüllt, dann existiert natürlich auch keine, die i)–iii) erfüllt.

Wir erweitern nun die lineare unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ von U. Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v_3', v_4' \in V$. Da $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v_3', v_4' \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u_3') = v_3', \quad \varphi(u_4') = v_4',$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: $\boxed{\text{Ja}}$! ◊

Frage 1·2 Gibt es eine

b) injektive c) surjektive d) bijektive[b]

b') nicht-injektive c') nicht-surjektive d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) > \dim(V)$, kann es generell keine injektiven linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **b)**, **d)** $\boxed{\text{Nein}}$, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **b')** und **d')** $\boxed{\text{Ja}}$.

Es bleiben nur noch **c)** und **c')** zu bestimmen. Sei $\varphi : U \to V$ eine lineare Ausdehnung von i)–iii). Dann wegen Bedingungen i) + ii) und Linearität gilt

$$\text{Bild}(\varphi) \supseteq \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\} = \text{Lin}\{v_1, v_2\} = V.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist,[c] und somit eine Basis von dem 2-dimensionalen Raum, V, ist. Darum ist Bild(φ) surjektiv. Da φ beliebig war, haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iii) surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf **c)** $\boxed{\text{Ja}}$ und auf **c')** $\boxed{\text{Nein}}$. ◊

[a] ich lasse hier die Beweise weg, aber man sollte die zeigen, z. B. durch das Gaußverfahren.
[b] also einen »Isomorphismus«
[c] ich lasse wieder den Beweis weg, aber man sollte das machen

Aufgabe 1·2

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U := \mathbb{R}^4$ und $V := \mathbb{R}^2$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·3 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

iv) $\varphi(u_4) = v_4$

alle erfüllt sind? $\Diamond$

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig sind und dass $u_3, u_4 \in \mathrm{Lin}\{u_{1,2}\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Wir beachten auch, dass

$$\begin{aligned} 10v_2 - 10v_1 &= \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix} = v_3, \\ v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \end{pmatrix} = v_4 \end{aligned}$$

gelten. Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse iii) + iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Wir erweitern nun die lineare unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ von U. Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v_3', v_4' \in V$. Da $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v_3', v_4' \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u_3') = v_3', \quad \varphi(u_4') = v_4',$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: $\boxed{\text{Ja}}$! $\Diamond$

Frage 1·4 Gibt es eine

b) injektive

c) surjektive

d) bijektive

b') nicht-injektive

c') nicht-surjektive

d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? $\Diamond$

Lösung. Da $\dim(U) > \dim(V)$, kann es generell keine injektiven linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **b)**, **d)** $\boxed{\text{Nein}}$, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **b')** und **d')** $\boxed{\text{Ja}}$.

Es bleiben nur noch **c)** und **c')** zu bestimmen. Beachte, dass in der Konstruktion von φ im o. s. Beweis wir v_3', v_4' beliebig auswählen konnten.

Zu **c)** wähle bspw. $v_3' := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_4' := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_1 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\varphi_1) &= \varphi_1(\mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}) \\ &= \mathrm{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3'), \varphi(u_4')\} \\ &= \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3', v_4'\} \\ &\supseteq \mathrm{Lin}\{v_1, v_3'\} \\ &= V \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil per Wahl $\{v_1, v_3'\}$ linear unabhängig ist und somit eine Basis des 2-dimenionalen Vektorraums, V ist. Da $\mathrm{Bild}(\varphi_1) \supseteq V$, ist φ_1 surjektiv. Die Antwort auf **c)** lautet also $\boxed{\text{Ja}}$.

Zu **c')** wähle $v_3', v_4' := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\mathrm{Rang}(\varphi_2) \overset{\text{Defn}}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3', v_4'\}) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1\}) \leqslant 1$, da per Wahl $v_2, v_3, v_4 \in \mathrm{Lin}\{v_1\}$ und $v_1 \neq \mathbf{0}$. Also, $\mathrm{Rang}(\varphi_2) < 2 = \dim(V)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht-surjektiv. Die Antwort auf **c')** lautet also $\boxed{\text{Ja}}$. $\Diamond$

Aufgabe 1·3

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \quad u_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·5 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Beachte, dass $u_3 = u_1 + u_2$, aber

$$v_1 + v_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \neq \quad v_3.$$

Angenommen, es gebe eine lineare Ausdehnung $\varphi : U \to V$, die i)–iii) erfüllt. Dann muss $v_3 = \varphi(u_3) = \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = v_1 + v_2$ gelten. Laut der o. s. Gleichung kann dies aber nicht gelten. Darum lautet die Antwort $\boxed{\text{Nein}}$. Es gibt keine lineare Ausdehnung. ◊

Aufgabe 1·4

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·6 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_3\}$ linear unabhängig ist und dass $u_2 \in \mathrm{Lin}\{u_1\}$, da $u_2 = 2u_1 + u_3$. Wir beachten auch, dass

$$2v_1 + u_3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \quad = \quad v_2$$

gilt. Darum können wir die Frage auf Bedingung i) + iii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse ii) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt wird.

Wegen linearer Unabhängigkeit ist $\{u_1, u_3\}$ bereits eine Basis des 2-dimensionalen Raums, U. Deswegen brauchen wir in dieser Aufgabe keine Erweiterung zu machen. Da $\{u_1, u_3\}$ eine Basis für U und $\{v_1, v_3\} \subseteq V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_3) = v_3,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingung i) + iii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: $\boxed{\text{Ja}}$! ◊

Frage 1·7 Gibt es eine

b) injektive c) surjektive d) bijektive

b') nicht-injektive c') nicht-surjektive d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) < \dim(V)$, kann es generell keine surjektive linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **c)**, **d)** $\boxed{\text{Nein}}$, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **c')** und **d')** $\boxed{\text{Ja}}$.

Es bleiben nur noch **b)** und **b')** zu bestimmen. Sei φ eine lineare Ausdehnung, die i)–iii) erfüllt. Dann wegen Linearität von φ und da $\{u_1, u_3\}$ eine Basis von U ist, gilt

$$\mathrm{Bild}(\varphi) \quad = \quad \varphi(\mathrm{Lin}\{u_1, u_3\}) \quad = \quad \mathrm{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_3)\} \quad = \quad \mathrm{Lin}\{v_1, v_3\}$$

und damit $\mathrm{Rang}(\varphi) \overset{\text{Defn}}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, v_3\}) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_3\}) = 1$, da $v_1 \in \mathrm{Lin}\{v_3\}$ und $v_3 \neq \mathbf{0}$. Also, $\mathrm{Rang}(\varphi) < 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht injektiv. Da hier φ beliebig gewählt wurde, sind alle linearen Ausdehnungen von i)–iii) immer nicht-injektiv. Darum lautet die Antwort auf **b)** $\boxed{\text{Nein}}$ und auf **b')** $\boxed{\text{Ja}}$. ◊

Aufgabe 1·5

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \quad u_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right), \quad u_3 = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}8\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}16\\0\\0\\8\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}24\\0\\0\\12\end{pmatrix}.$$

Frage 1·8 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1\}$ linear unabhängig ist und dass $u_2, u_3 \in \mathsf{Lin}\{u_1\}$, da $u_2 = 2u_1$ und $u_3 = 3u_1$. Wir beachten auch, dass

$$\begin{aligned} 2v_1 &= \begin{pmatrix}16\\0\\0\\8\end{pmatrix} = v_2, \\ 3v_1 &= \begin{pmatrix}24\\0\\0\\12\end{pmatrix} = v_3 \end{aligned}$$

gelten. Darum können wir die Frage auf Bedingung i) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse ii) + iii) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Erweitere $\{u_1\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2'\}$ des 2-dimensionalen Raums, U, und wähle einen Vektor $v_2' \in V$. Da $\{u_1, u_2'\}$ eine Basis für U und $\{v_1, v_2'\} \subseteq V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2') = v_2',$$

gelten. Insbesondere sind Bedingung i) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: $\boxed{\text{Ja}}$! ◊

Frage 1·9 Gibt es eine

b) injektive c) surjektive d) bijektive

b') nicht-injektive c') nicht-surjektive d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) < \dim(V)$, kann es generell keine surjektive linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **c)**, **d)** $\boxed{\text{Nein}}$, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **c')** und **d')** $\boxed{\text{Ja}}$.

Es bleiben nur noch **b)** und **b')** zu bestimmen. Beachte, dass in der Konstruktion von φ im o. s. Beweis wir v_2' beliebig auswählen konnten.

Zu **b)** wähle $v_2' := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und sei $\varphi_1 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u_2'\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\mathsf{Bild}(\varphi_1) = \varphi_1(\mathsf{Lin}\{u_1, u_2'\}) = \mathsf{Lin}\{\varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2')\} = \mathsf{Lin}\{v_1, v_2'\},$$

und damit $\mathsf{Rang}(\varphi_1) \overset{\mathsf{Defn}}{=} \dim(\mathsf{Bild}(\varphi_1)) = \dim(\mathsf{Lin}\{v_1, v_2'\}) = 2$, da per Wahl $\{v_1, v_2'\}$ linear unabhängig ist. Also, $\mathsf{Rang}(\varphi_1) \geqslant 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ_1 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] injektiv. Die Antwort auf **b)** lautet also $\boxed{\text{Ja}}$.

Zu **b')** wähle $v_2' := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\mathsf{Rang}(\varphi_2) \overset{\mathsf{Defn}}{=} \dim(\mathsf{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\mathsf{Lin}\{v_1, v_2'\}) = \dim(\mathsf{Lin}\{v_1\}) \leqslant 1$, da per Wahl $v_2' \in \mathsf{Lin}\{v_1\}$. Also, $\mathsf{Rang}(\varphi_2) < 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht-injektiv. Die Antwort auf **b')** lautet also $\boxed{\text{Ja}}$. ◊

Aufgabe 1·6

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3\\0\\2\\2 \end{pmatrix},$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0\\3\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1\\3\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 10\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1\\6\\0\\0 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·10 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

iv) $\varphi(u_4) = v_4$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Zunächst beobachte, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_3, u_4 \in \mathsf{Lin}\{u_1, u_2\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Beachte auch, dass sich diese Verhältnisse in den Outputvektoren wiederspiegeln:

$$\begin{aligned} 10v_2 - 10v_1 &= \begin{pmatrix} 10\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = v_3, \\ v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} 1\\6\\0\\0 \end{pmatrix} = v_4. \end{aligned}$$

Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse iii) + iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Erweitere nun die linear unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ von U. Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v_3', v_4' \in V$. Da $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v_3', v_4' \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u_3') = v_3', \quad \varphi(u_4') = v_4',$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: $\boxed{\text{Ja}}$! ◊

Frage 1·11 Gibt es eine

b) injektive

b') nicht-injektive

c) surjektive

c') nicht-surjektive

d) bijektive

d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) = \dim(V)$, sind **b)**, **c)**, **d)** äquivalent und genauso sind **b')**, **c')**, **d)** äquivalent, da für lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen gleicher Dimensionen Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität äquivalent sind. Darum reicht es aus, nur **c)** und **c')** zu behandeln.

Zu **c)**, da $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ linear unabhängig sind, wähle $v_3', v_4' \in V$ so, dass $\{v_1, v_2, v_3', v_4'\}$ eine Basis des 4-dimensionalen Raums, V, bildet. Sei $\varphi_1 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\begin{aligned} \mathsf{Bild}(\varphi_1) &= \varphi_1(\mathsf{Lin}\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}) \\ &= \mathsf{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3'), \varphi(u_4')\} \\ &= \mathsf{Lin}\{v_1, v_2, v_3', v_4'\} \end{aligned}$$

und damit $\mathsf{Bild}(\varphi_1) = V$, da per Wahl $\{v_1, v_2, v_3', v_4'\}$ eine Basis von V ist. Folglich ist φ_1 surjektiv. Die Antwort auf **c)** (und **b)** und **d)**), lautet also $\boxed{\text{Ja}}$.

Zu **c')** wähle $v_3', v_4' := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\mathsf{Rang}(\varphi_2) \overset{\text{Defn}}{=} \dim(\mathsf{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\mathsf{Lin}\{v_1, v_2, v_3', v_4'\}) = \dim(\mathsf{Lin}\{v_1, v_2\}) \leqslant 2$, da per Wahl $v_3', v_4' \in \mathsf{Lin}\{v_1, v_2\}$. Also, $\mathsf{Rang}(\varphi_2) < 4 = \dim(V)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] nicht-surjektiv. Die Antwort auf **c')** (und **b')** und **d')**) lautet also $\boxed{\text{Ja}}$. ◊

Aufgabe 1·7

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·12 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

iv) $\varphi(u_4) = v_4$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Zunächst beobachte, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_3, u_4 \in \mathrm{Lin}\{u_1, u_2\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Beachte auch, dass sich diese Verhältnisse in den Outputvektoren wiederspiegeln:

$$\begin{aligned} 10v_2 - 10v_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= v_3, \\ v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= v_4. \end{aligned}$$

Der Rest dieser Aufgabe lässt sich nun genauso wie bei Frage 1·10 erledigen. Die Antwort hier lautet also wieder: $\boxed{\text{Ja}}$, es gibt eine lineare Ausdehnung, die i)–iv) erfüllt. ◊

Frage 1·13 Gibt es eine

b) injektive

c) surjektive

d) bijektive

b') nicht-injektive

c') nicht-surjektive

d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) = \dim(V)$, sind **b)**, **c)**, **d)** äquivalent und genauso sind **b')**, **c')**, **d)** äquivalent, da für lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen gleicher Dimensionen Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität äquivalent sind. Darum reicht es aus, nur **b)** und **b')** zu behandeln.

Sei nun $\varphi : U \to V$ eine beliebige lineare Abbildung, die i)–iv) erfüllt (laut der letzten Aufgabe existiert mindestens eine). Da $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig ist, können wir dies zu einer Basis $\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}$ von U erweitern. Da φ eine Ausdehnung und linear ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\varphi) &= \varphi(\mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3', u_4'\}) \\ &= \mathrm{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3'), \varphi(u_4')\} \\ &= \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, \varphi(u_3'), \varphi(u_4')\}. \end{aligned}$$

Darum gilt $\mathrm{Rang}(\varphi) \overset{\text{Defn}}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, v_2, \varphi(u_3'), \varphi(u_4')\}) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, \varphi(u_3'), \varphi(u_4')\}) \leqslant 3$, da $v_2 \in \mathrm{Lin}\{v_1\}$. Also, $\mathrm{Rang}(\varphi) < 4 = \dim(V)$. Folglich ist φ laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] nicht-surjektiv. Da φ beliebig war, haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iv) nicht-surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf **c)** (und **b)** und **d)**) $\boxed{\text{Nein}}$ und auf **c')** (und **b')** und **d')**) $\boxed{\text{Ja}}$. ◊

Aufgabe 1·8

Betrachten wir die $\mathbb{R}$-Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^3$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·14 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

iv) $\varphi(u_4) = v_4$

alle erfüllt sind? ♢

Lösung. Zunächst beobachte, dass $\{u_1, u_2, u_4\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_3 \in \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_4\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1 + u_4$. Beachte auch, dass sich dieses Verhältnis in den Outputvektoren wiederspiegelt:

$$10v_2 - 10v_1 + v_4 \quad = \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad v_3.$$

Darum können wir die Frage auf Bedingungen i)–iii) reduzieren, weil wegen des o. s. Verhältnisses iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt wird.

Hier müssen wir nun im Gegensatz zu den anderen Aufgaben nichts hinzufügen! Da $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig ist, bildet dies bereits eine Basis des 3-dimenionalen Raums U. Da $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v_3 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u_3) = v_3$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i)–iii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: $\boxed{\text{Ja}}$! ♢

Frage 1·15 Gibt es eine

b) injektive

b') nicht-injektive

c) surjektive

c') nicht-surjektive

d) bijektive

d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ♢

Lösung. Da $\dim(U) = \dim(V)$, sind **b)**, **c)**, **d)** äquivalent und genauso sind **b')**, **c')**, **d)** äquivalent, da für lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen gleicher Dimensionen Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität äquivalent sind. Darum reicht es aus, nur **c)** und **c')** zu behandeln.

Sei nun $\varphi : U \to V$ eine beliebige lineare Abbildung, die i)–iv) erfüllt (laut der letzten Aufgabe existiert mindestens eine). Da φ eine Ausdehnung und linear ist und da $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\varphi) &= \varphi(\mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}) \\ &= \mathrm{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3)\} \\ &= \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}. \end{aligned}$$

Nun ist $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ linear unabhängig und bildet somit eine Basis des 3-dimenionalen Vektorraums, V. Darum gilt $\mathrm{Bild}(\varphi) \supseteq V$, sodass φ surjektiv ist. Da φ beliebig war, haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iv) surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf **c)** (und **b)** und **d)**) $\boxed{\text{Ja}}$ und auf **c')** (und **b')** und **d')**) $\boxed{\text{Nein}}$. ♢

Bemerkung 1·16 Laut [Sin20, Satz 6.1.13] die für Frage 1·14 konstruierte lineare Abbildung, φ, eindeutig. Da wir keine freie Wahl trafen, gibt es also exakt eine lineare Abbildung, die i)–iv) erfüllt. Darum ist die letzte Frage eigentlich »Ist die lineare Ausdehnung injektiv/nicht-injektiv/...?«. ♢

Bemerkung 1·17 Wir hätten die o. s. Aufgabe so aufstellen können, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig wäre. Dann hätte die lineare Ausdehnung den Rang < 3. Die Antworten auf **c)**, **b)**, **d)**) würden dann »Nein« lauten, und auf **c')**, **b')**, **d')** »Ja«. ♢

2

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 2·1

Aufgabe. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums von dem Gleichungssystem, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei A die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & 13 & 2 \\ -7 & 14 & -1 & -32 & -9 \end{smallmatrix}\right)$ über dem Körper $K = \mathbb{R}$ ist. ◊

Lösung. Um die allgemeine Form der Lösungen zu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zu bestimmen, reduzieren wir zunächst A auf Zeilenstufenform und normalisieren:

$$
\begin{aligned}
A &\xrightarrow[Z_3 \leftarrow 2\cdot Z_3 + 7\cdot Z_1]{Z_2 \leftarrow 2\cdot Z_2 - 3\cdot Z_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -22 & -4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[Z_2 \leftarrow 7\cdot Z_2 + 4\cdot Z_3]{Z_1 \leftarrow 7\cdot Z_1 + 3\cdot Z_3} \begin{pmatrix} 14 & -28 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[Z_3 \leftarrow Z_3 : -2]{Z_1 \leftarrow Z_1 : 2,\ Z_2 \leftarrow Z_2 : 2} \begin{pmatrix} \boxed{7} & -14 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aus der Zeilenstufenform ergibt sich, in $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Variablen x_2, x_5 frei sind und

$$
\begin{aligned}
x_4 &= && -(3/7)x_5 \\
x_3 &= && (19/7)x_5 \\
x_1 &= 2x_2 &+& (2/7)x_5.
\end{aligned}
\tag{2·1}
$$

Eine Basis des Lösungsraums, Kern$(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, lässt sich nach [Sin20, Satz 5.3.8] finden, indem wir die Lösungen berechnen, für die genau eine der freien Unbekannten auf einen Wert ungleich 0 und alle anderen auf 0 gesetzt werden.[a] Hier gilt

$$
\begin{aligned}
x_2 = 1,\ x_5 = 0 &\implies \mathbf{x} \overset{(2·1)}{=} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\
x_2 = 0,\ x_5 = 7 &\implies \mathbf{x} \overset{(2·1)}{=} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 19 \\ -3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Darum ist $\boxed{\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 19 \\ -3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) \right\}}$ eine Basis des Lösungsraums. ◊

Bemerkung. Es ist empfehlenwert hier zu überprüfen, dass $A\mathbf{x}$ wirklich gleich $\mathbf{0}$ für alle Basiselemente gilt. ◊

Aufgabe. Bestimmen Sie den Spaltenraum von A aus der letzten Aufgabe (noch über dem Körper $K = \mathbb{R}$). ◊

Lösung. Bezeichne mit $a^{(j)} \in \mathbb{R}^3$ für $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ die Spalten von A. Aus der o. s. Zeilenstufenform,

[a] Im [Sin20, Satz 5.3.8] wird beschrieben, dass man 1 verwendet, aber man kann die Elemente einer Basis mit beliebigen Werten ungleich 0 multiplizieren, ohne zu ändern, dass die Menge eine Basis ist.

$$\begin{pmatrix} \boxed{7} & -14 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 3 \end{pmatrix},$$

geht hervor, dass Spalten 1, 3, 4 aus A eine Basis des Spaltenraums bilden.[b] Also ist

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -32 \end{pmatrix} \right\}}$$

eine Basis des Spaltenraums. $\Diamond$

Zur Kontrolle: Aus der letzten Teilaufgabe erhielten wir eine Basis des Lösungsraums der Länge 2, d. h. $\dim(\text{Kern}(A)) = 2$, und hier wurde eine Basis des Spaltenraums der Länge 3, d. h. $\text{Rang}(A) = \dim(\text{Bild}(A)) = 3$. Wir sehen dass $\dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A) = 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$, sodass die Dimensionsformel für lineare Abbildungen erfüllt ist.[c]

Bemerkung. Falls in der letzten Aufgabe der Körper etwas anderes wäre, so hätten wir die Zeilenstufenform erneut für diesen Körper berechnen müssen. $\Diamond$

[b] Die allgemeine Begründung ist wie folgt: Aus der Zeilenstufenform folgt, dass Spalten 1, 3, 4 aus A linear unabhängig sind und dass die übrigen von diesen linear abhängig sind. D. h. $\mathcal{A} := \{a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(4)}\}$ ist linear unabhängig und $a^{(2)}, a^{(5)} \in \text{Lin}\,\mathcal{A}$. Da $\text{Bild}(A) = \text{Lin}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}, a^{(5)}\}$, ist folglich $\mathcal{A}$ eine Basis für $\text{Bild}(A)$.

[c] Das heißt nicht, dass unsere berechneten Basen deswegen richtig ist. Dies ist lediglich zu kontrollieren, dass unsere Basen »nicht offensichtlich falsch« sind.

Aufgabe 2·2

Aufgabe. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums von dem Gleichungssystem, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei A die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & 13 & 2 \\ -7 & 14 & -1 & -32 & -9 \end{smallmatrix}\right)$ über dem Körper $K = \mathbb{F}_7$ ist. $\Diamond$

Lösung. Um die <u>allgemeine Form</u> der Lösungen zu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zu bestimmen, reduzieren wir A auf Zeilenstufenform und normalisieren. Bei/vor jedem Schritt ersetzen wir Werte durch kanonische Darstellungen von Zahlen modulo 7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
A &\xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 + 2\cdot Z_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[Z_2 \leftarrow 2\cdot Z_2 - 3\cdot Z_3]{Z_1 \leftarrow 2\cdot Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\substack{Z_1 \leftarrow 2\cdot Z_1 \\ Z_2 \leftarrow 4\cdot Z_2 \\ Z_3 \leftarrow 2\cdot Z_3}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(Beachte, dass $2^{-1} = 4$ und $4^{-1} = 2$ in $\mathbb{F}_7$, weil $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \mod 7$. Darum wurden im letzten Schritt die Zeilen jeweils mit 2 oder 4 multipliziert.)

Aus der Zeilenstufenform ergibt sich, in $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ die Variablen x_2, x_4 frei sind und

$$\begin{aligned}
x_5 &= 0 \\
x_3 &= -4x_4 \\
x_1 &= -5x_2 - 3x_4.
\end{aligned}$$

Eine Basis des Lösungsraums, Kern$(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_7^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$, lässt sich nach [Sin20, Satz 5.3.8] finden, indem wir die Lösungen berechnen, für die genau eine der freien Unbekannten auf einen Wert ungleich 0 und alle anderen auf 0 gesetzt werden. Hier gilt

$$\begin{aligned}
x_2 = 1,\, x_4 = 0 &\implies \mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\
x_2 = 0,\, x_4 = 1 &\implies \mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Darum ist $\boxed{\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}}$ eine Basis des Lösungsraums. $\Diamond$

Bemerkung. Wiederum wird empfohlen, zu kontrollieren, dass $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ für alle Basiselemente gilt. Beachte hier, dass wir modulo 7 berechnen sollen.[d] Bei den o. s. Lösungen kommen $A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 14 \\ 28 \\ -63 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ raus, sodass wir erleichtert sein können, dass unsere Basiselemente richtig sind. (Ob die Größe der Basis stimmt, ist aber nicht damit überprüft. Da müssen wir einfach prüfen, dass die Zeilenstufenform richtig berechnet wurde, um die Anzahl der Stufen und freien Variablen zu bestätigen.) $\Diamond$

Aufgabe. Bestimmen den Spaltenraum von A aus der letzten Aufgabe (noch über dem Körper $K = \mathbf{F}_7$). $\Diamond$

---

[d] In **octave**, **python**, *etc.* benutzt man `%` für Moduloberechnungen. In **octave** kann auch direkt `(A  [2, 1, 0, 0, 0].') % 7` eingeben. In **python** kann man `(np.matmul(A, [2, 1, 0, 0, 0]) % 7` eingeben (wenn man vorher *numpy* als *np* konventionsgemäß importiert).

Lösung. Bezeichne mit $a^{(j)} \in \mathbb{R}^3$ für $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ die Spalten von A. Aus der o. s. Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

geht hervor, dass Spalten 1, 3, 5 aus A eine Basis des Spaltenraums bilden. Also ist

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}}$$

eine Basis des Spaltenraums. $\Diamond$

Zur Kontrolle: Aus der letzten Teilaufgabe erhielten wir dim(Kern(A)) $= 2$, und hier wurde nebenbei gezeigt, dass Rang(A) $=$ dim(Bild(A)) $= 3$. Also gilt dim(Kern(A)) $+$ Rang(A) $= 5 =$ dim($\mathbb{R}^5$), sodass die Dimensionsformel für lineare Abbildungen erfüllt ist.[e]

Bemerkung. Die hier verwendete Matrix, A, war »die gleiche« wie in Aufgabe 1. Nur war der Körper anders. Wir sehen, dass wir nicht einfach so die über $\mathbb{R}$ berechnete Zeilenstufenform in dieser Aufgabe übernehmen durften. Wenn man die Berechnung der Zeilenreduktion als Zwischenschritt betrachtet, so erkennt man, dass dieser Zwischenschritt beim Wechseln des Körper der Sicherheit halber nochmals durchgeführt werden muss. $\Diamond$

[e] Das heißt nicht, dass unsere berechneten Basen deswegen richtig ist. Dies ist lediglich zu kontrollieren, dass unsere Basen »nicht offensichtlich falsch« sind.

Literaturverzeichnis

[Jec97] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, 1997.

[Sin20] Rainer Sinn. Lineare Algebra I: Skript zur Veranstaltung Universität Leipzig. Vorlesungsskript, 2020.

[Wal16] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.