Aufgabe 6 (Klausur$_1$, WiSe 2020/2021)

Es sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über einem Körper, K. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt dann *stark kontrahierend*, wenn $\exists n \in \mathbb{N} : \varphi^n = 0(\cdot)$.

Aufgabe 6a

Behauptung. *Sei $\varphi : V \to V$ linear. Dann gilt φ* stark kontrahierend $\Rightarrow$ *φ nicht invertierbar.* $\diamondsuit$

Es gibt hierfür mehrere Ansätze. In jedem der u. s. Möglichkeiten fixieren wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi^n = \mathbf{0}$, und wir nehmen an, φ sei *stark kontrahierend*.

Als möglicherweise einfachste Ansätze kann man auf der Ebene von Abbildungen argumentieren.

Ansatz I. **Zu zeigen**, φ sei nicht invertierbar. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Aus **Lemma 6.3.2** im Skript (siehe insbes. den Beweis dort) ist die Menge der invertierbaren lineare Abbildungen unter „Multiplikation" (d. h. Komposition) abgeschlossen. Darum sind φ, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2$, ... alle invertierbar. Insbesondere muss $\varphi^n (= 0(\cdot))$ $\boxed{\text{invertierbar}}$ sein. Da $V \neq \{\mathbf{0}\}$ ist die $0(\cdot)$-Abbildung $\boxed{\text{nicht invertierbar}}$. Widerspuch! Also ist φ nicht invertierbar. ■

Ansatz II. Es reicht aus **zu zeigen**, dass φ nicht surjektiv ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Aus **Satz 2.3.6(1)** im Skript (siehe insbes. den Beweis) sind surjektive Abbildungen unter Komposition abgeschlossen. Darum sind φ, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2$, ... alle surjektiv. Insbesondere muss φ^n surjektiv sein. Da φ^n linear ist, muss also $\boxed{\text{Bild}(\varphi^n) = V}$ gelten. Da $\varphi^n = 0(\cdot)$, gilt aber $\text{Bild}(\varphi^n) = \{\mathbf{0}\}$. Darum muss $V = \{\mathbf{0}\}$ gelten, was der Voraussetzung auf V widerspricht. Darum haben wir einen Widerspruch erreicht. Also ist φ nicht surjektiv, w.z.z.w. ■

Ansatz III. Es reicht aus **zu zeigen**, dass φ nicht injektiv ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Aus **Satz 2.3.6(1)** im Skript (siehe insbes. den Beweis) sind injektive Abbildungen unter Komposition abgeschlossen. Darum sind φ, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2$, ... alle injektiv. Insbesondere muss φ^n injektiv sein. Da φ^n linear ist, muss also $\boxed{\text{Kern}(\varphi^n) = \{\mathbf{0}\}}$ gelten. Da $\varphi^n = 0(\cdot)$, gilt aber $\text{Kern}(\varphi^n) = V$ (weil $\varphi^n(u) = \mathbf{0}$ für alle $u \in V$). Darum muss $\{\mathbf{0}\} = V$ gelten, was der Voraussetzung auf V widerspricht. Darum haben wir einen Widerspruch erreicht. Also ist φ nicht injektiv, w.z.z.w. ■

Als direkter Ansatz kann man auf der Ebene von Vektoren argumentieren und konstruktiv vorgehen.

Ansatz IV. Es reicht aus **zu zeigen**, dass $\text{Kern}(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$, d. h. dass φ nicht injektiv ist. Wir zeigen dies direkt. Da $V \neq \{\mathbf{0}\}$ existiert ein $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Betrachten wir die Elemente:

$$(\mathbf{0} \neq) v = \varphi^0(v), \quad \varphi^1(v), \quad \varphi^2(v), \quad \ldots, \quad \varphi^n(v) (= \mathbf{0})$$

Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leqslant k < n$, so dass $\varphi^k(v) \neq \mathbf{0}$ und $\varphi^{k+1}(v) = \mathbf{0}$. (Man kann das auch so argumentieren: wähle $k \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $\varphi^k(v) \neq \mathbf{0}$. Dann muss $0 \leqslant k < n$ gelten.) Setze $u := \varphi^k(v)$. Dann per Konstruktion gilt $u \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\varphi(u) = \varphi(\varphi^k(v)) = \varphi^{k+1}(v) = \mathbf{0}$. Also gilt $u \in \text{Kern}(u) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Darum $\text{Kern}(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$, w.z.z.w. ■

Die vielleicht schönsten Ideen kamen von zwei Studierenden und verwenden *Dimension* bzw. *Determinante*.

Ansatz V. **Zu zeigen:** $\dim(\text{Kern}(\varphi)) > 0$. (Anhand Elementarkenntnisse wissen wir, dass dies zu $\text{Kern}(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$ äquivalent ist, was wiederum zu der Nichtinjektivität von φ äquivalent ist, was die Nichtinvertierbarkeit von φ impliziert.)

O. E. können wir auch annehmen, dass n minimal gewählt wird, so dass $\varphi^n = 0(\cdot)$.

Fall 1. $n = 1$. Dann gilt $\varphi = \varphi^1 = 0(\cdot)$, woraus sich $\text{Kern}(\varphi) = V$ und $\dim(\text{Kern}(\varphi)) = \dim(V) > 0$ ergibt, da $V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Fall 2. $n > 1$. Dann gilt $\varphi \circ \varphi^{n-1} = \varphi^n = 0(\cdot)$, woraus sich $\boxed{\text{Bild}(\varphi^{n-1}) \subseteq \text{Kern}(\varphi)}^{(*)}$ ergibt. Nun, wegen Minimalität von n kann $\varphi^{n-1} = 0(\cdot)$ nicht gelten. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \varphi^{n-1} \neq 0(\cdot) \quad &\Longrightarrow \quad \text{Bild}(\varphi^{n-1}) \neq \{\mathbf{0}\} \\ &\Longrightarrow \quad \dim(\text{Bild}(\varphi^{n-1})) > 0 \\ &\Longrightarrow \quad \dim(\text{Kern}(\varphi)) \geqslant \dim(\text{Bild}(\varphi^{n-1})) > 0. \end{aligned}$$

In der letzten Aussage gilt die erste Ungleichung gilt wegen $(*)$.

Darum gilt in allen Fällen $\dim(\text{Kern}(\varphi)) > 0$, wzzw. ■

Ansatz VI. (Funktioniert nur, wenn V endlich dimensional ist.) Sei A eine Matrizendarstellung von φ. **Zu zeigen:** $\det(A) = 0$ (da A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$). Es gilt $\det(A)^n = \det(A^n) = \det(\mathbf{0}) = 0$. Daraus folgt, dass $\det(A) = 0$. ■

NOTENSCHEMA	
Punkte	Beschreibung
3	Argument vollständig (=ausführlich) und logisch gültig.
2	Der Ansatz war richtig aber z. B.: er war nicht ausführlich (enthielt jedoch genug von dem nicht trivialen Teil); oder die Aufgabe war in (a) falsch, aber versteckteweise in (b) vorhanden (und zwar vollständig+gültig); oder er baute z. T. auf einem inkorrekt präsentierten Resultat (was dann z. B. auf die Ausführlichkeit eine Auswirkung hatte).
1	Ansatz enthielt eine richtige Idee, aber wurde nicht korrekt/ausführlich ausgeführt, od. man schließt die (nicht triviale) Lücke zw. Aussage über φ^n und Aussage über φ nicht
0	sonst.

Bemerkung. Da es sich hier um die Bewertung von Argumentationen handelt, kann man in Wirklichkeit kein Schema festlegen. Stattdessen musste über die Qualität Urteile getroffen werden. In erster Linie kriegt man volle Punkte, wenn man vollständig (idealerweise auch ausführlich) + gültig + überzeugend argumentierte. Ab dann wurden anhand unterschiedlicher Defizite empirische Graduierungen implementiert. Wenn etwas unvollständig oder ungültig war, bekam der Versuch einen Abzug. Wenn etwas zu unordentlich oder inkohärent war, wurde meistens 0 Pkt gegeben. (Hier ging es nicht um Handschrift, sondern um die Präsentation insgesamt, den Umgang mit technischen Mitteln und den Aufbau des Argumentes.) Dies wurde dennoch gespart, wenn die Argumentation eine richtige Idee enthielt. Es gab z. B. einen Fall, wo leider ein Denkfehler (ungültiger Schritt) vorlag, aber der Ansatz war sonst sauber aufgeschrieben, sodass der Versuch mindestens 1 Pkt verdiente.

Aufgabe 6b

Behauptung. *Sei* $\varphi : V \to V$ *linear und* stark kontrahierend. *Sei* $v \in V$ *mit* $v \neq \mathbf{0}$ *und* $\varphi(v) \neq \mathbf{0}$. *Dann gilt* Kern$(\varphi) \cap$ Bild$(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$. $\Diamond$

Beachte, dass (offensichtlich) $\mathbf{0} \in$ Kern(φ) und $\mathbf{0} \in$ Bild(φ) gelten, sodass Kern$(\varphi) \cap$ Bild$(\varphi) \supseteq \{\mathbf{0}\}$. Was wir also eigentlich in dieser Behauptung zeigen, ist Kern$(\varphi) \cap$ Bild$(\varphi) \supset \{\mathbf{0}\}$ (strikte Inklusion), d. h. dass ein Element $u \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ existiert, so dass dasselbe Element u sowohl in Kern(φ) als auch in Bild(φ) liegt.

Es gibt hierfür mehrere Ansätze. In jedem der u. s. Möglichkeiten fixieren wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi^n = \mathbf{0}$, und wir nehmen an, φ sei *stark kontrahierend.*

Ansatz I. **Zu zeigen:** Es gibt ein Element $u \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $u \in$ Kern(φ) und $u \in$ Bild(φ).

Um ein solches u zu konstruieren, betrachten wir die Elemente:

$$v = \varphi^0(v), \quad \varphi^1(v), \quad \varphi^2(v), \quad \ldots, \quad \varphi^n(v)(= \mathbf{0})$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $\varphi^k(v) = \mathbf{0}$. Da $\varphi^n(v) = \mathbf{0}$, ist dies wohldefiniert. Da $\varphi^0(v) \neq \mathbf{0}$ und $\varphi^1(v) \neq \mathbf{0}$, gilt $k \geqslant 2$.

Darum können wir den Vektor, $u := \varphi^{k-1}(v)$ betrachten. Wegen Minimalität von k gilt $u \neq \mathbf{0}$. Da $k \geqslant 2$, gilt $u = \varphi(\varphi^{k-2}(v)) \in$ Bild(φ). Und per Wahl von k gilt $\varphi(u) = \varphi(\varphi^{k-1}(v)) = \varphi^k(v) = \mathbf{0}$, sodass $u \in$ Kern(u) gilt. Darum haben wir ein passendes Element gefunden, und die Behauptung ist bewiesen. $\blacksquare$

Ansatz II. **Zu zeigen:** Kern$(\varphi) \cap$ Bild$(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann

$$\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) \quad = \quad \{\mathbf{0}\}. \tag{$\star$}$$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $\varphi^k(v) = \mathbf{0}$. Da $\varphi^n(v) = \mathbf{0}$, ist dies wohldefiniert und per Voraussetzung auf v gilt $k \geqslant 2$.

Man betrachte nun $u := \varphi^{k-1}(v)$. Wegen Minimalität von k gilt $u \neq \mathbf{0}$. Da $k \geqslant 2$, gilt $u = \varphi(\varphi^{k-2}(v)) \in$ Bild(φ). Und per Wahl von k gilt $\varphi(u) = \varphi(\varphi^{k-1}(v)) = \varphi^k(v) = \mathbf{0}$, sodass $u \in$ Kern(u) gilt. Darum $u \in$ Kern$(\varphi) \cap$ Bild$(\varphi) \overset{(\star)}{=} \{\mathbf{0}\}$. Also $\varphi^{k-1}(v) = u = \mathbf{0}$, was ein Widerspruch zur Minimalität von k ist. Da wir einen Widerspruch erreicht haben, gilt doch Kern$(\varphi) \cap$ Bild$(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$. $\blacksquare$

Beachte, dass diese Ansätze eigentlich äquivalent sind: in dem II. Ansatz haben wir das gesuchte Element in I konstruiert. Aber die Zielsetzungen sind anders.

NOTENSCHEMA

Punkte	Beschreibung
3	Argument vollständig (=ausführlich) und logisch gültig.
2	Fehlte was Kleines (aber Wichtiges), wie, explizit zu sagen/zeigen, dass $\varphi^{k-1}(v) \in$ Bild(φ) oder dass $\varphi^{k-1}(v) \in$ Kern(φ) (aber wenn beides fehlten kriegt man natürlich weniger als 2), oder dass $k \geqslant 2$ (was nötig ist, damit man $\varphi^{k-1}(v) = \varphi^{k-2}(v)$ schreiben darf). Oder man hat mit $k = n - 1$ gearbeitet, obwohl das nicht unbedingt stimmt (außer man wählte n minimal für v, aber das muss man dann sagen).
1,5	Der Ansatz enthielt eine richtige Idee, aber wurde nicht korrekt oder ausführlich ausgeführt. Es lag zumindest vor, dass man ein gemeinsames Element in Kern(φ) und im Bild(φ) zeigen musste.
1	Der Ansatz enthielt eine richtige Idee, aber wurde nicht korrekt oder ausführlich ausgeführt. Unterschied zu 1,5: Entweder fehlte zu viel oder war an Stellen inkohärent.
0	sonst.

Bemerkung. Hier lagen wiederum Schwierigkeiten vor, ein Schema festzulegen. Dafür wurde ähnliche Prinzipien angewandt wie in A6a (siehe Bemerkung dort). Spezifisch zu dieser Aufgabe konnte man folgendes Beobachten:

- Denkfehler im Ansatz: Viele haben ein Element in Kern(φ) gesucht, dann eins in Bild(φ), aber kein gemeinsames Element.
- Technische Kleinigkeiten (die jedoch keine Lappalien sind): Damit man $\varphi^{k-1}(v)$ und $\varphi^{k-2}(v)$ überhaupt bilden darf, muss man begründen, dass $k \geqslant 1$ bzw. $k \geqslant 2$. Ein sorgfältiger Umgang mit Randfällen und zu prüfen, dass etwas nicht jenseits eines Randes, sind allgemein wichtig in allen technischen Bereichen.
- Es schien für einige schwierig zu unterscheiden, wann etwas trivial war, und wann etwas explizit/ausführlich begründet werden soll.
- Manchmal argumentierte man für Ergebnisse, die schon in anderen Teilaufgaben vorhanden waren. So etwas weist darauf hin, dass man sich der Bedeutung der Resultate bzw. der Zusammenhänge nicht bewusst ist. Auch wenn eine Prüfung größtenteils sachlich ist, ist es dennoch sinnvoll, sich zu überlegen, wie die Teile einer Aufgabe aufeinander aufbauen und wie sie konzipiert sind.

Aufgabe 6c

Hier müssen wir für $V = \mathbb{R}^2$ ein lineares $\varphi : V \to V$ konstruieren, so dass $\varphi \neq 0(\cdot)$ und so dass φ *stark kontrahierend* ist. Äquivalent können wir eine passende Matrixdarstellung, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, konstruieren.

Hier ein paar Möglichkeiten:

- $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist A offensichtlich ungleich **0** (die Nullmatrix). Und $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sodass A (bzw. φ_A) auch *stark kontrahierend* ist.
- $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist A offensichtlich ungleich **0**. Und $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sodass A (bzw. φ_A) auch *stark kontrahierend* ist.

Es gibt natürlich viel mehr Möglichkeiten.

NOTENSCHEMA	
Punkte	Beschreibung
2	Konstruktion beide Eigenschaften erfüllt + stark kontrahierend begründet.
1	Konstruktion beide Eigenschaften erfüllt, aber unbegründet.
0	Konstruktion erfüllt mind. eine der zwei Bedingungen nicht.

Aufgabe 6d

Hier müssen wir für $V = \mathbb{R}^2$ ein $\varphi : V \to V$, so dass φ nicht invertierbar und so dass φ nicht *stark kontrahierend* ist. Äquivalent können wir eine passende Matrixdarstellung, $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, konstruieren.

Hier ein paar Möglichkeiten:

- $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Da Rang$(A) = 1$, ist A nicht invertierbar. (Auch möglich: man weise darauf hin, dass die Spalten in A nicht linear unabhängig sind.) Es gilt nun $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. Darum $A^3 = A^2 \cdot A = 2A \cdot A = 2 \cdot A^2 = 2 \cdot 2A = 2^2 A$, usw. Man sieht per Induktion, dass $A^n = 2^n A \neq \mathbf{0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Darum ist A (bzw. φ_A) nicht *stark kontrahierend*.
- $A := \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ für $p \in [0,1]$. Da Rang$(A) = 1$, ist A nicht invertierbar. (Auch möglich: man weise darauf hin, dass die Spalten in A nicht linear unabhängig sind.) Es gilt nun $A^2 = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix} = A$. Darum $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$, usw. Man sieht per Induktion, dass $A^n = A \neq \mathbf{0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Darum ist A (bzw. φ_A) nicht *stark kontrahierend*.
- $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Da Rang$(A) = 1$, ist A nicht invertierbar. (Auch möglich: berechne Zeilenstufen form und begründe dadurch.) Es gilt nun $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Darum $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$, usw. Man sieht per Induktion, dass $A^n = A \neq \mathbf{0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Darum ist A (bzw. φ_A) nicht *stark kontrahierend*.
- $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da Rang$(A) = 1$, ist A nicht invertierbar. (Auch möglich: man weise darauf hin, dass die Spalten in A nicht linear unabhängig sind.) Es gilt nun $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$. Darum $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$, usw. Man sieht per Induktion, dass $A^n = A \neq \mathbf{0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Darum ist A (bzw. φ_A) nicht *stark kontrahierend*.

Es gibt natürlich viel mehr Möglichkeiten.

NOTENSCHEMA

Punkte	Beschreibung
2	Konstruktion erfüllt beide Eigenschaften + und 2 Eigenschaften begründet.
1,5	Konstruktion erfüllt beide Eigenschaften + und 1 Eigenschaft begründet.
1	Konstruktion erfüllt beide Eigenschaften + und 0 Eigenschaft begründet.
0	sonst.

Bemerkung. Es gab keine Teilpunkte, wenn A invertierbar war. Der Grund hierfür war, dass, *auch wenn man die anderen Aufgaben nicht beweisen konnte*, man aus 6(a) hätte verstehen müssen, dass

$$\text{stark kontrahierend} \implies \text{nicht invertierbar} \qquad (\star)$$

und damit trivialerweise

$$\text{invertierbar} \implies \text{nicht stark kontrahierend}$$

gelten. Der Zweck von Aufgabe 6(d) ist zu zeigen, dass die Implikation in $(\star)$ strikt ist, und dass die Umkehrung von $(\star)$:

$$\text{nicht invertierbar} \implies \text{stark kontrahierend}$$

nicht gilt. Dies zeigt man, indem man ein φ findet, die nicht invertierbar ist und nicht *stark kontrahierend* ist.