Lineare Algebra I

⊛ ⊛

Zusatzaufgaben aus der Übungsgruppe

Raj Dahya
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig.
Wintersemester 2020/2021

Vorwort

Dieses Dokument enthält zusätzliche Aufgaben und Themen, die in den Übungsgruppen erörtert wurden.

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Ausdehnung

In der Übungsgruppe in Woche 12 (am 3.2.2021) diskutierten wir verzwickte Situationen und Fragentypen, die zum Thema linearer Ausdehnung vorkommen können. Wir hatten das größtenteils theoretisch ausgelegt. Hier wollen wir ein paar Aufgaben komplett durchrechnen.

Beachte! Hier geht es niemals darum, eine lineare Ausdehnung *exmplizit darzustellen*, sondern vielmehr (1) [Sin20, Satz 6.1.13] als zentrales Resultat anzuwenden, (2) eine Basis aus den Inputvektoren zu generieren (ggf. durch Entfernung von „linear abhängigen“ Vektoren, ggf. durch Basiserweiterung, ggf. durch beides!) (3) die Input und Outputvektoren in der partielldefinierten Funktion zu untersuchen, und rein aufgrund dessen ein Urteil zu treffen, ob (3a) eine lineare Ausdehnung überhaupt möglich ist, (3b) eine injektive/nicht injektive lineare Ausdehnung möglich ist, (3c) eine surjektive/nicht surjektive lineare Ausdehnung möglich ist, (3d) eine Isomorphismus (=Bijektion)/nicht-Isomorphismus als lineare Ausdehnung möglich ist.

Nun, im Falle von Funktionen $\varphi : U \to V$, wobei U, V Vektorräume mit $\dim(U) = \dim(V)$, sind wegen [Sin20, Korollar 6.1.11] die Nebenfragen (3a)–(3c) alle äquivalent. Im Falle $\dim(U) \neq \dim(V)$ machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch:

Beobachtung. Seien U, V (endlich dimensionale) Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : U \to V$ linear. Da $\text{Bild}(\varphi) \subseteq V$ gilt offensichtlich $\dim(\text{Bild}(\varphi)) \leqslant \dim(V)$. Und wenn wir eine Basis $\{u_1, u_2 \ldots, u_n\} \subseteq U$ für U fixieren, mit $n = \dim(U)$, so gilt wegen Linearität $\text{Bild}(\varphi) = \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2) \ldots, \varphi(u_n)\}$. Das heißt, $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2) \ldots, \varphi(u_n)\}$ ist ein Erzeugendensystem für $\text{Bild}(\varphi)$. Folglich gilt $\dim(\text{Bild}(\varphi)) \leqslant n = \dim(U)$. Da per Definition $\text{Rang}(\varphi) = \dim(\text{Bild}(\varphi))$, haben wir gezeigt, dass $\text{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(V)$ und $\text{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(U)$ stets gelten. Kürzer formuliert:

$$\text{Rang}(\varphi) \leqslant \min\{\dim(U), \dim(V)\} \tag{1·1}$$

gilt immer für alle lineare Abbildungen $\varphi : U \to V$ und alle Vektorräume U, V. ◊

Aus dieser Beobachtung können wir über (3b–3d) folgende Urteile generell treffen, wenn $\dim(U) \neq \dim(V)$:

- Falls $\dim(U) > \dim(V)$ kann es bei offensichtlich höchstens nicht-injektive lineare Ausdehnungen geben, weil für $\varphi : U \to V$ linear gilt $\text{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(V) < \dim(U)$, sodass laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] φ niemals injektiv sein kann.

  Darum lautet die Antwort zu (3b/3d) *Gibt es injektive/bijektive...?* immer nein. Die Fragen (3b/3d) *Gibt es nicht-injektive/nicht-bijektive...?* sind dann äquivalent zu (3a).

- Falls $\dim(U) < \dim(V)$ kann es bei (3c) offensichtlich höchstens nicht-surjektive lineare Ausdehnungen geben, weil für $\varphi : U \to V$ linear gilt $\text{Rang}(\varphi) \leqslant \dim(U) < \dim(V)$, sodass laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] φ niemals surjektiv sein kann.

  Darum lautet die Antwort zu (3c/3d) *Gibt es surjektive/bijektive...?* immer nein. Die Fragen (3b/3d) *Gibt es nicht-surjektive/nicht-bijektive...?* sind dann äquivalent zu (3a).

Daher können wir die Fragentypen in den Aufgaben immer teilweise sofort beantworten und zum Teil vereinfachen, je nachdem, ob $\dim(U) = \dim(V)$, oder $\dim(U) < \dim(V)$, oder $\dim(U) > \dim(V)$ gelten.

Aufgabe 1·1

Betrachten wir die Vektorräume $U := \mathbb{R}^4$ und $V := \mathbb{R}^2$. Betrachten wir die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben durch

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -140 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·2 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? $\lozenge$

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig sind[a] und dass $u_3 \in \mathrm{Lin}\{u_{1,2}\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$. Wir beachten auch, dass

$$10v_2 - 10v_1 = \begin{pmatrix} -140 \\ 30 \end{pmatrix} = v_3$$

gilt. Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren: existiert eine lineare Abbildung, die i) + ii) erfüllt, dann wird wegen Linearität Bedingung iii) automatisch mit erfüllt. Existiert keine lineare Abbildung, die i) + ii) erfüllt, dann existiert natürlich auch keine, die i)–iii) erfüllt.

Wir erweitern nun die lineare unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ von U. Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v'_3, v'_4 \in V$. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v'_3, v'_4 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u'_3) = v'_3, \quad \varphi(u'_4) = v'_4,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: »Ja«! $\lozenge$

Frage 1·4 Gibt es eine

b) injektive	c) surjektive	d) bijektive[b]
b') nicht-injektive	c') nicht-surjektive	d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? $\lozenge$

Lösung. Da $\dim(U) > \dim(V)$, kann es generell keine injektiven linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf b), d) »Nein«, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf b') und d') »Ja«.

Es bleiben nur noch c) und c') zu bestimmen. Sei $\varphi : U \to V$ eine lineare Ausdehnung von i)–iii). Dann wegen Bedingungen i) + ii) und Linearität gilt

$$\mathrm{Bild}(\varphi) \supseteq \mathrm{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\} = V.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist[c], und somit eine Basis von dem 2-dimensionalen Raum, V, ist. Darum ist $\mathrm{Bild}(\varphi)$ surjektiv. Da φ beliebig war haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iii) surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf c) »Ja« und auf c') »Nein«. $\lozenge$

[a] ich lasse hier die Beweise weg, aber man sollte die zeigen, z. B. durch das Gaußverfahren.

[b] also einen »Isomorphismus«

[c] ich lasse wieder den Beweis weg, aber man sollte das machen

Aufgabe 1·2

Betrachten wir die Vektorräume $U := \mathbb{R}^4$ und $V := \mathbb{R}^2$. Betrachten wir die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben durch

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 8 \end{smallmatrix}\right), \quad v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 25 \\ 40 \end{smallmatrix}\right), \quad v_3 = \left(\begin{smallmatrix} -140 \\ 30 \end{smallmatrix}\right), \quad v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 30 \\ 48 \end{smallmatrix}\right).$$

Frage 1·6 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

iv) $\varphi(u_4) = v_4$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig sind und dass $u_3, u_4 \in \text{Lin}\{u_{1,2}\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Wir beachten auch, dass

$$\begin{array}{rcccl} 10v_2 - 10v_1 & = & \left(\begin{smallmatrix} -140 \\ 30 \end{smallmatrix}\right) & = & v_3, \\ v_1 + v_2 & = & \left(\begin{smallmatrix} 30 \\ 48 \end{smallmatrix}\right) & = & v_4 \end{array}$$

gelten. Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse iii) + iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Wir erweitern nun die lineare unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ von U. Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v'_3, v'_4 \in V$. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v'_3, v'_4 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u'_3) = v'_3, \quad \varphi(u'_4) = v'_4,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: »Ja«! ◊

Frage 1·8 Gibt es eine

b) injektive

c) surjektive

d) bijektive

b') nicht-injektive

c') nicht-surjektive

d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) > \dim(V)$, kann es generell keine injektiven linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf b), d) »Nein«, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf b') und d') »Ja«.

Es bleiben nur noch c) und c') zu bestimmen. Beachte, dass in der Konstruktion von φ im o. s. Beweis wir v'_3, v'_4 beliebig auswählen konnten.

Zu c) wähle $v'_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $v'_4 := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_1 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\begin{array}{rcl} \text{Bild}(\varphi_1) & = & \varphi_1(\text{Lin}\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}) \\ & = & \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\} \\ & = & \text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\} \end{array}$$

und damit eine Basis des 2-dimensionalen Vektorraums, V. Darum gilt $\text{Rang}(\varphi_1) \overset{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_1)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\}) \geqslant \dim(\text{Lin}\{v_1, v'_3\}) = 2$, da per Wahl $\{v_1, v'_3\}$ linear unabhängig ist. Also, $\text{Rang}(\varphi_1) \geqslant 2 = \dim(V)$. Folglich ist φ_1 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] surjektiv. Die Antwort auf c) lautet also »Ja«.

Zu c') wähle $v'_3, v'_4 := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\text{Rang}(\varphi_2) \overset{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\}) = \dim(\text{Lin}\{v_1\}) \leqslant 1$, da per Wahl $v_2, v_3, v_4 \in \text{Lin}(\{v_1\})$ und $v_1 \neq \mathbf{0}$. Also, $\text{Rang}(\varphi_2) < 2 = \dim(V)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht-surjektiv. Die Antwort auf c') lautet also »Ja«. ◊

Aufgabe 1·3

Betrachten wir die Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$. Betrachten wir die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben durch

$$u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \quad u_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Frage 1·10 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? $\lozenge$

Lösung. Beachte, dass $u_3 = u_1 + u_2$, aber

$$v_1 + v_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \neq \quad v_3.$$

Angenommen, es gebe eine lineare Ausdehnung $\varphi : U \to V$, die i)–iii) erfüllt. Dann muss $v_3 = \varphi(u_3) = \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = v_1 + v_2$ gelten. Laut der o. s. Gleichung kann dies aber nicht gelten. Darum lautet die Antwort »Nein«. Es gibt keine lineare Ausdehnung. $\lozenge$

Aufgabe 1·4

Betrachten wir die Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$. Betrachten wir die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben durch

$$u_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \quad u_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right), \quad u_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}8\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}16\\0\\0\\9\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Frage 1·12 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_3\}$ linear unabhängig ist und dass $u_2 \in \mathrm{Lin}\{u_1\}$, da $u_2 = 2u_1 + u_3$. Wir beachten auch, dass

$$2v_1 + u_3 = \begin{pmatrix}18\\0\\0\\9\end{pmatrix} = v_2$$

gilt. Darum können wir die Frage auf Bedingung i) + iii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse ii) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt wird.

Wegen linearer Unabhängigkeit ist $\{u_1, u_3\}$ bereits eine Basis des 2-dimensionalen Raums, U. Deswegen brauchen wir in dieser Aufgabe keine Erweiterung zu machen. Da $\{u_1, u_3\}$ eine Basis für U und $\{v_1, v_3\} \subseteq V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_3) = v_3,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingung i) + iii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: »Ja«! ◊

Frage 1·14 Gibt es eine

b) injektive c) surjektive d) bijektive

b') nicht-injektive c') nicht-surjektive d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) < \dim(V)$, kann es generell keine surjektive linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf c), d) »Nein«, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf c') und d') »Ja«.

Es bleiben nur noch b) und b') zu bestimmen. Sei φ eine lineare Ausdehnung, die i)—iii) erfüllt. Dann wegen Linearität von φ_1 und da $\{u_1, u_3\}$ eine Basis von U ist, gilt

$$\mathrm{Bild}(\varphi_1) = \varphi_1(\mathrm{Lin}\{u_1, u_3\}) = \mathrm{Lin}\{\varphi_1(u_1), \varphi_1(u_3)\} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_3\}$$

und damit $\mathrm{Rang}(\varphi) \overset{\mathrm{Defn}}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, v_3\}) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_3\}) = 1$, da $v_1 \in \mathrm{Lin}\{v_3\}$ und $v_3 \neq \mathbf{0}$. Also, $\mathrm{Rang}(\varphi) < 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht injektiv. Da hier φ beliebig gewählt wurde, sind alle linearen Ausdehnungen von i)–iii) immer nicht-injektiv. Darum lautet die Antwort auf b) »Nein« und auf b') »Ja«. ◊

Aufgabe 1·5

Betrachten wir die Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$. Betrachten wir die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ gegeben durch

$$u_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \quad u_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right), \quad u_3 = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}8\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}16\\0\\0\\8\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}24\\0\\0\\12\end{pmatrix}.$$

Frage 1·16 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$ **ii)** $\varphi(u_2) = v_2$ **iii)** $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◊

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1\}$ linear unabhängig ist und dass $u_2, u_3 \in \mathrm{Lin}\{u_1\}$, da $u_2 = 2u_1$ und $u_3 = 3u_1$. Wir beachten auch, dass

$$\begin{aligned} 2v_1 &= \begin{pmatrix}16\\0\\0\\8\end{pmatrix} = v_2, \\ 3v_1 &= \begin{pmatrix}24\\0\\0\\12\end{pmatrix} = v_3 \end{aligned}$$

gelten. Darum können wir die Frage auf Bedingung i) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse ii) + iii) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Erweitere $\{u_1\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2'\}$ des 2-dimensionalen Raums, U, und wähle einen Vektor $v_2' \in V$. Da $\{u_1, u_2'\}$ eine Basis für U und $\{v_1, v_2'\} \subseteq V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2') = v_2',$$

gelten. Insbesondere sind Bedingung i) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: »Ja«! ◊

Frage 1·18 Gibt es eine

b) injektive	c) surjektive	d) bijektive
b') nicht-injektive	c') nicht-surjektive	d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \to V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◊

Lösung. Da $\dim(U) < \dim(V)$, kann es generell keine surjektive linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf c), d) »Nein«, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf c') und d') »Ja«.

Es bleiben nur noch b) und b') zu bestimmen. Beachte, dass in der Konstruktion von φ im o. s. Beweis wir v_2' beliebig auswählen konnten.

Zu b) wähle $v_2' := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und sei $\varphi_1 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Per Wahl ist $\{v_1, v_2'\}$ linear unabhängig. Da $\{u_1, u_2'\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\mathrm{Bild}(\varphi_1) = \varphi_1(\mathrm{Lin}\{u_1, u_2'\}) = \mathrm{Lin}\{\varphi_1(u_1), \varphi_1(u_2')\} = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2'\}$$

und damit $\mathrm{Rang}(\varphi_1) \overset{\mathrm{Defn}}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi_1)) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, v_2'\}) = 2$, da per Wahl $\{v_1, v_2'\}$ linear unabhängig ist. Also, $\mathrm{Rang}(\varphi_1) \geqslant 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ_1 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] injektiv. Die Antwort auf b) lautet also »Ja«.

Zu b') wähle $v_2' := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \to V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\mathrm{Rang}(\varphi_2) \overset{\mathrm{Defn}}{=} \dim(\mathrm{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1, v_2'\}) = \dim(\mathrm{Lin}\{v_1\}) = 1$, da per Wahl $v_2' \in \mathrm{Lin}(\{v_1\})$ und $v_1 \neq \mathbf{0}$. Also, $\mathrm{Rang}(\varphi_2) < 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht-injektiv. Die Antwort auf b') lautet also »Ja«. ◊

Aufgabe 1·6

Unter Arbeit. **TODO**: *Beispiel mit* $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{dim}(V)$ *und mit Antwort »Ja« auf inj + »Ja« auf nicht-inj.*

Aufgabe 1·7

Unter Arbeit. **TODO**: *Beispiel mit* $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{dim}(V)$ *und mit Antwort »Ja« auf inj + »Nein« auf nicht-inj.*

Aufgabe 1·8

Unter Arbeit. **TODO**: *Beispiel mit* $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{dim}(V)$ *und mit Antwort »Nein« auf inj + »Ja« auf nicht-inj.*

Literaturverzeichnis

[Jec97] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, 1997.

[Sin20] Rainer Sinn. Lineare Algebra I: Skript zur Veranstaltung Universität Leipzig. Vorlesungsskript, 2020.

[Wal16] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.