
Lineare Algebra I



Zusatzaufgaben aus der Übungsgruppe



Vorwort

Dieses Dokument enthält zusätzliche Aufgaben und Themen, die in den Übungsgruppen erörtert wurden.

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Ausdehnung	4
1.1	Aufgabe 1	5
1.2	Aufgabe 2	6
1.3	Aufgabe 3	7
1.4	Aufgabe 4	8
1.5	Aufgabe 5	9
1.6	Aufgabe 6	10
1.7	Aufgabe 7	11
1.8	Aufgabe 8	12
	Literaturverzeichnis	13

Lineare Ausdehnung

In der Übungsgruppe in Woche 12 (am 3.2.2021) diskutierten wir verzwickte Situationen und Fragentypen, die zum Thema linearer Ausdehnung vorkommen können. Wir hatten das größtenteils theoretisch ausgelegt. Hier wollen wir ein paar Aufgaben komplett durchrechnen.

Beachte! Hier geht es niemals darum, eine lineare Ausdehnung *explizit darzustellen*, sondern vielmehr (1) [Sin20, Satz 6.1.13] als zentrales Resultat anzuwenden, (2) eine Basis aus den Inputvektoren zu generieren (ggf. durch Entfernung von „linear abhängigen“ Vektoren, ggf. durch Basiserweiterung, ggf. durch beides!) (3) die Input und Outputvektoren in der partielldefinierten Funktion zu untersuchen, und rein aufgrund dessen ein Urteil zu treffen, ob (3a) eine lineare Ausdehnung überhaupt möglich ist, (3b) eine injektive/nicht injektive lineare Ausdehnung möglich ist, (3c) eine surjektive/nicht surjektive lineare Ausdehnung möglich ist, (3d) eine Isomorphismus (=Bijektion)/nicht-Isomorphismus als lineare Ausdehnung möglich ist.

Nun, im Falle von Funktionen $\varphi : U \rightarrow V$, wobei U, V Vektorräume mit $\dim(U) = \dim(V)$, sind wegen [Sin20, Korollar 6.1.11] die Nebenfragen (3a)–(3c) alle äquivalent. Im Falle $\dim(U) \neq \dim(V)$ machen wir von folgender Beobachtung Gebrauch:

Beobachtung. Seien U, V (endlich dimensionale) Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : U \rightarrow V$ linear. Da $\text{Bild}(\varphi) \subseteq V$ gilt offensichtlich $\dim(\text{Bild}(\varphi)) \leq \dim(V)$. Und wenn wir eine Basis $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq U$ für U fixieren, mit $n = \dim(U)$, so gilt wegen Linearität $\text{Bild}(\varphi) = \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)\}$. Das heißt, $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)\}$ ist ein Erzeugendensystem für $\text{Bild}(\varphi)$. Folglich gilt $\dim(\text{Bild}(\varphi)) \leq n = \dim(U)$. Da per Definition $\text{Rang}(\varphi) = \dim(\text{Bild}(\varphi))$, haben wir gezeigt, dass $\text{Rang}(\varphi) \leq \dim(V)$ und $\text{Rang}(\varphi) \leq \dim(U)$ stets gelten. Kürzer formuliert:

$$\text{Rang}(\varphi) \leq \min\{\dim(U), \dim(V)\} \quad (1.1)$$

gilt immer für alle lineare Abbildungen $\varphi : U \rightarrow V$ und alle Vektorräume U, V . \diamond

Aus dieser Beobachtung können wir über (3b–3d) folgende Urteile generell treffen, wenn $\dim(U) \neq \dim(V)$:

- Falls $\dim(U) > \dim(V)$ kann es bei offensichtlich höchstens nicht-injektive lineare Ausdehnungen geben, weil für $\varphi : U \rightarrow V$ linear gilt $\text{Rang}(\varphi) \leq \dim(V) < \dim(U)$, sodass laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] φ niemals injektiv sein kann.

Darum lautet die Antwort zu (3b/3d) *Gibt es injektive/bijektive...?* immer nein. Die Fragen (3b/3d) *Gibt es nicht-injektive/nicht-bijektive...?* sind dann äquivalent zu (3a).

- Falls $\dim(U) < \dim(V)$ kann es bei (3c) offensichtlich höchstens nicht-surjektive lineare Ausdehnungen geben, weil für $\varphi : U \rightarrow V$ linear gilt $\text{Rang}(\varphi) \leq \dim(U) < \dim(V)$, sodass laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] φ niemals surjektiv sein kann.

Darum lautet die Antwort zu (3c/3d) *Gibt es surjektive/bijektive...?* immer nein. Die Fragen (3b/3d) *Gibt es nicht-surjektive/nicht-bijektive...?* sind dann äquivalent zu (3a).

Daher können wir die Fragentypen in den Aufgaben immer teilweise sofort beantworten und zum Teil vereinfachen, je nachdem, ob $\dim(U) = \dim(V)$, oder $\dim(U) < \dim(V)$, oder $\dim(U) > \dim(V)$ gelten.

Aufgabe 1.1

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U := \mathbb{R}^4$ und $V := \mathbb{R}^2$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -140 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.1 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind? ◇

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig sind^a und dass $u_3 \in \text{Lin}\{u_1, u_2\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$. Wir beachten auch, dass

$$10v_2 - 10v_1 = \begin{pmatrix} -140 \\ 30 \end{pmatrix} = v_3$$

gilt. Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren: existiert eine lineare Abbildung, die i) + ii) erfüllt, dann wird wegen Linearität Bedingung iii) automatisch mit erfüllt. Existiert keine lineare Abbildung, die i) + ii) erfüllt, dann existiert natürlich auch keine, die i)–iii) erfüllt.

Wir erweitern nun die linear unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ von U . Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v'_3, v'_4 \in V$. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v'_3, v'_4 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u'_3) = v'_3, \quad \varphi(u'_4) = v'_4,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: Ja! ◇

Frage 1.2 Gibt es eine

b) injektive

c) surjektive

d) bijektive^b

b') nicht-injektive

c') nicht-surjektive

d') nicht-bijektive

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◇

Lösung. Da $\dim(U) > \dim(V)$, kann es generell keine injektiven linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **b)**, **d)** Nein, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **b')** und **d')** Ja.

Es bleiben nur noch **c)** und **c')** zu bestimmen. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine lineare Ausdehnung von i)–iii). Dann wegen Bedingungen i) + ii) und Linearität gilt

$$\text{Bild}(\varphi) \supseteq \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\} = \text{Lin}\{v_1, v_2\} = V.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist,^c und somit eine Basis von dem 2-dimensionalen Raum, V , ist. Darum ist $\text{Bild}(\varphi)$ surjektiv. Da φ beliebig war, haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iii) surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf **c)** Ja und auf **c')** Nein. ◇

^aich lasse hier die Beweise weg, aber man sollte die zeigen, z. B. durch das Gaußverfahren.

^balso einen »Isomorphismus«

^cich lasse wieder den Beweis weg, aber man sollte das machen

Aufgabe 1.2

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U := \mathbb{R}^4$ und $V := \mathbb{R}^2$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.3 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| i) $\varphi(u_1) = v_1$ | iii) $\varphi(u_3) = v_3$ |
| ii) $\varphi(u_2) = v_2$ | iv) $\varphi(u_4) = v_4$ |

alle erfüllt sind? ◇

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig sind und dass $u_3, u_4 \in \text{Lin}\{u_1, u_2\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Wir beachten auch, dass

$$\begin{aligned} 10v_2 - 10v_1 &= \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix} = v_3, \\ v_1 + v_2 &= \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \end{pmatrix} = v_4 \end{aligned}$$

gelten. Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse iii) + iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Wir erweitern nun die linear unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ von U . Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v'_3, v'_4 \in V$. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v'_3, v'_4 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u'_3) = v'_3, \quad \varphi(u'_4) = v'_4,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: Ja! ◇

Frage 1.4 Gibt es eine

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| b) injektive | c) surjektive | d) bijektive |
| b') nicht-injektiv | c') nicht-surjektiv | d') nicht-bijektiv |

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◇

Lösung. Da $\dim(U) > \dim(V)$, kann es generell keine injektiven linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **b)**, **d)** Nein, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **b')** und **d')** Ja.

Es bleiben nur noch **c)** und **c')** zu bestimmen. Beachte, dass in der Konstruktion von φ im o. s. Beweis wir v'_3, v'_4 beliebig auswählen konnten.

Zu **c)** wähle bspw. $v'_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v'_4 := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_1 : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\varphi_1) &= \varphi_1(\text{Lin}\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}) \\ &= \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\} \\ &= \text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\} \\ &\supseteq \text{Lin}\{v_1, v'_3\} \\ &= V \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil per Wahl $\{v_1, v'_3\}$ linear unabhängig ist und somit eine Basis des 2-dimensionalen Vektorraums, V ist. Da $\text{Bild}(\varphi_1) \supseteq V$, ist φ_1 surjektiv. Die Antwort auf **c)** lautet also Ja.

Zu **c')** wähle $v'_3, v'_4 := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\text{Rang}(\varphi_2) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\}) = \dim(\text{Lin}\{v_1\}) \leq 1$, da per Wahl $v_2, v_3, v_4 \in \text{Lin}\{v_1\}$ und $v_1 \neq \mathbf{0}$. Also, $\text{Rang}(\varphi_2) < 2 = \dim(V)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht-surjektiv. Die Antwort auf **c')** lautet also Ja. ◇

Aufgabe 1.3

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.5 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind?

◇

Lösung. Beachte, dass $u_3 = u_1 + u_2$, aber

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq v_3.$$

Angenommen, es gebe eine lineare Ausdehnung $\varphi : U \rightarrow V$, die i)–iii) erfüllt. Dann muss $v_3 = \varphi(u_3) = \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = v_1 + v_2$ gelten. Laut der o. s. Gleichung kann dies aber nicht gelten. Darum lautet die Antwort Nein. Es gibt keine lineare Ausdehnung.

◇

Aufgabe 1.4

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.6 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

i) $\varphi(u_1) = v_1$

ii) $\varphi(u_2) = v_2$

iii) $\varphi(u_3) = v_3$

alle erfüllt sind?

◇

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1, u_3\}$ linear unabhängig ist und dass $u_2 \in \text{Lin}\{u_1, u_3\}$, da $u_2 = 2u_1 + u_3$. Wir beachten auch, dass

$$2v_1 + v_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = v_2$$

gilt. Darum können wir die Frage auf Bedingung i) + iii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse ii) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt wird.

Wegen linearer Unabhängigkeit ist $\{u_1, u_3\}$ bereits eine Basis des 2-dimensionalen Raums, U . Deswegen brauchen wir in dieser Aufgabe keine Erweiterung zu machen. Da $\{u_1, u_3\}$ eine Basis für U und $\{v_1, v_3\} \subseteq V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_3) = v_3,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingung i) + iii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: Ja! ◇

Frage 1.7 Gibt es eine

b) injektive

c) surjektive

d) bijektive

b') nicht-injektiv

c') nicht-surjektiv

d') nicht-bijektiv

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iii) erfüllt sind?

◇

Lösung. Da $\dim(U) < \dim(V)$, kann es generell keine surjektive linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **c)**, **d)** Nein, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **c')** und **d')** Ja.

Es bleiben nur noch **b)** und **b')** zu bestimmen. Sei φ eine lineare Ausdehnung, die i)–iii) erfüllt. Dann wegen Linearität von φ und da $\{u_1, u_3\}$ eine Basis von U ist, gilt

$$\text{Bild}(\varphi) = \varphi(\text{Lin}\{u_1, u_3\}) = \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_3)\} = \text{Lin}\{v_1, v_3\}$$

und damit $\text{Rang}(\varphi) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_3\}) = \dim(\text{Lin}\{v_3\}) = 1$, da $v_1 \in \text{Lin}\{v_3\}$ und $v_3 \neq \mathbf{0}$. Also, $\text{Rang}(\varphi) < 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht injektiv. Da hier φ beliebig gewählt wurde, sind alle linearen Ausdehnungen von i)–iii) immer nicht-injektiv. Darum lautet die Antwort auf **b)** Nein und auf **b')** Ja. ◇

Aufgabe 1.5

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U := \mathbb{R}^2$ und $V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in U$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.8 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\text{i) } \varphi(u_1) = v_1 \qquad \text{ii) } \varphi(u_2) = v_2 \qquad \text{iii) } \varphi(u_3) = v_3$$

alle erfüllt sind? ◇

Lösung. Wir beachten zuerst, dass $\{u_1\}$ linear unabhängig ist und dass $u_2, u_3 \in \text{Lin}\{u_1\}$, da $u_2 = 2u_1$ und $u_3 = 3u_1$. Wir beachten auch, dass

$$2v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = v_2,$$

$$3v_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = v_3$$

gelten. Darum können wir die Frage auf Bedingung i) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse ii) + iii) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Erweitere $\{u_1\}$ zu einer Basis $\{u_1, u'_2\}$ des 2-dimensionalen Raums, U , und wähle einen Vektor $v'_2 \in V$. Da $\{u_1, u'_2\}$ eine Basis für U und $\{v_1, v'_2\} \subseteq V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u'_2) = v'_2,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingung i) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: Ja! ◇

Frage 1.9 Gibt es eine

- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| b) injektive | c) surjektive | d) bijektive |
| b') nicht-injektive | c') nicht-surjektive | d') nicht-bijektive |

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iii) erfüllt sind? ◇

Lösung. Da $\dim(U) < \dim(V)$, kann es generell keine surjektive linearen Abbildungen von U nach V geben. Also lauten die Antworten auf **c)**, **d)** Nein, und da es mindestens eine lineare Ausdehnung existiert, lautet die Antwort auf **c')** und **d')** Ja.

Es bleiben nur noch **b)** und **b')** zu bestimmen. Beachte, dass in der Konstruktion von φ im o. s. Beweis wir v'_2 beliebig auswählen konnten.

Zu **b)** wähle $v'_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und sei $\varphi_1 : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u'_2\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\text{Bild}(\varphi_1) = \varphi_1(\text{Lin}\{u_1, u'_2\}) = \text{Lin}\{\varphi_1(u_1), \varphi_1(u'_2)\} = \text{Lin}\{v_1, v'_2\},$$

und damit $\text{Rang}(\varphi_1) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_1)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v'_2\}) = 2$, da per Wahl $\{v_1, v'_2\}$ linear unabhängig ist. Also, $\text{Rang}(\varphi_1) \geq 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ_1 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] injektiv. Die Antwort auf **b)** lautet also Ja.

Zu **b')** wähle $v'_2 := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\text{Rang}(\varphi_2) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v'_2\}) = \dim(\text{Lin}\{v_1\}) \leq 1$, da per Wahl $v'_2 \in \text{Lin}\{v_1\}$. Also, $\text{Rang}(\varphi_2) < 2 = \dim(U)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(1)] nicht-injektiv. Die Antwort auf **b')** lautet also Ja. ◇

Aufgabe 1.6

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.10 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| i) $\varphi(u_1) = v_1$ | iii) $\varphi(u_3) = v_3$ |
| ii) $\varphi(u_2) = v_2$ | iv) $\varphi(u_4) = v_4$ |

alle erfüllt sind? ◇

Lösung. Zunächst beobachte, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_3, u_4 \in \text{Lin}\{u_1, u_2\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Beachte auch, dass sich diese Verhältnisse in den Outputvektoren wieder spiegeln:

$$10v_2 - 10v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3,$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_4.$$

Darum können wir die Frage auf Bedingungen i) + ii) reduzieren, weil wegen der o. s. Verhältnisse iii) + iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt werden.

Erweitere nun die linear unabhängige Menge $\{u_1, u_2\}$ zu einer Basis $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ von U . Wähle außerdem beliebige Vektoren, $v'_3, v'_4 \in V$. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v'_3, v'_4 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u'_3) = v'_3, \quad \varphi(u'_4) = v'_4,$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i) + ii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: Ja! ◇

Frage 1.11 Gibt es eine

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| b) injektive | c) surjektive | d) bijektive |
| b') nicht-injektiv | c') nicht-surjektiv | d') nicht-bijektiv |

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◇

Lösung. Da $\dim(U) = \dim(V)$, sind **b)**, **c)**, **d)** äquivalent und genauso sind **b')**, **c')**, **d)** äquivalent, da für lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen gleicher Dimensionen Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität äquivalent sind. Darum reicht es aus, nur **c)** und **c')** zu behandeln.

Zu **c)**, da $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ linear unabhängig sind, wähle $v'_3, v'_4 \in V$ so, dass $\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\}$ eine Basis des 4-dimensionalen Raums, V , bildet. Sei $\varphi_1 : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Da $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ eine Basis für U ist, gilt wegen Linearität von φ_1

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\varphi_1) &= \varphi_1(\text{Lin}\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}) \\ &= \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\} \\ &= \text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\} \end{aligned}$$

und damit $\text{Bild}(\varphi_1) = V$, da per Wahl $\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\}$ eine Basis von V ist. Folglich ist φ_1 surjektiv. Die Antwort auf **c)** (und **b)** und **d)**), lautet also Ja.

Zu **c')** wähle $v'_3, v'_4 := \mathbf{0}$ und sei $\varphi_2 : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung im o. s. Beweis mit diesen Vektoren in der Konstruktion. Wie oben gilt $\text{Rang}(\varphi_2) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi_2)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_2, v'_3, v'_4\}) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_2\}) \leq 2$, da per Wahl $v'_3, v'_4 \in \text{Lin}\{v_1, v_2\}$. Also, $\text{Rang}(\varphi_2) < 4 = \dim(V)$. Folglich ist φ_2 laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] nicht-surjektiv. Die Antwort auf **c')** (und **b')** und **d')**) lautet also Ja. ◇

Aufgabe 1.7

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^4$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.12 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| i) $\varphi(u_1) = v_1$ | iii) $\varphi(u_3) = v_3$ |
| ii) $\varphi(u_2) = v_2$ | iv) $\varphi(u_4) = v_4$ |

alle erfüllt sind? ◇

Lösung. Zunächst beobachte, dass $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_3, u_4 \in \text{Lin}\{u_1, u_2\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1$ und $u_4 = u_1 + u_2$. Beachte auch, dass sich diese Verhältnisse in den Outputvektoren wieder spiegeln:

$$10v_2 - 10v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3,$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_4.$$

Der Rest dieser Aufgabe lässt sich nun genauso wie bei Frage 1.10 erledigen. Die Antwort hier lautet also wieder: Ja, es gibt eine lineare Ausdehnung, die i)–iv) erfüllt. ◇

Frage 1.13 Gibt es eine

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| b) injektive | c) surjektive | d) bijektive |
| b') nicht-injektiv | c') nicht-surjektiv | d') nicht-bijektiv |

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◇

Lösung. Da $\dim(U) = \dim(V)$, sind **b)**, **c)**, **d)** äquivalent und genauso sind **b')**, **c')**, **d')** äquivalent, da für lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen gleicher Dimensionen Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität äquivalent sind. Darum reicht es aus, nur **b)** und **b')** zu behandeln.

Sei nun $\varphi : U \rightarrow V$ eine beliebige lineare Abbildung, die i)–iv) erfüllt (laut der letzten Aufgabe existiert mindestens eine). Da $\{u_1, u_2\}$ linear unabhängig ist, können wir dies zu einer Basis $\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}$ von U erweitern. Da φ eine Ausdehnung und linear ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\varphi) &= \varphi(\text{Lin}\{u_1, u_2, u'_3, u'_4\}) \\ &= \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\} \\ &= \text{Lin}\{v_1, v_2, \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\}. \end{aligned}$$

Darum gilt $\text{Rang}(\varphi) \stackrel{\text{Defn}}{=} \dim(\text{Bild}(\varphi)) = \dim(\text{Lin}\{v_1, v_2, \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\}) = \dim(\text{Lin}\{v_1, \varphi(u'_3), \varphi(u'_4)\}) \leq 3$, da $v_2 \in \text{Lin}\{v_1\}$. Also, $\text{Rang}(\varphi) < 4 = \dim(V)$. Folglich ist φ laut [Sin20, Korollar 6.3.15(2)] nicht-surjektiv. Da φ beliebig war, haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iv) nicht-surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf **c)** (und **b)** und **d)**) Nein und auf **c')** (und **b')** und **d')**) Ja. ◇

Aufgabe 1.8

Betrachten wir die \mathbb{R} -Vektorräume $U = V := \mathbb{R}^3$ und die Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 1.14 Gibt es eine lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| i) $\varphi(u_1) = v_1$ | iii) $\varphi(u_3) = v_3$ |
| ii) $\varphi(u_2) = v_2$ | iv) $\varphi(u_4) = v_4$ |

alle erfüllt sind? ◇

Lösung. Zunächst beobachte, dass $\{u_1, u_2, u_4\}$ linear unabhängig ist, und dass $u_3 \in \text{Lin}\{u_1, u_2, u_4\}$, da $u_3 = 10u_2 - 10u_1 + u_4$. Beachte auch, dass sich dieses Verhältnis in den Outputvektoren widerspiegelt:

$$10v_2 - 10v_1 + v_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3.$$

Darum können wir die Frage auf Bedingungen i)–iii) reduzieren, weil wegen des o. s. Verhältnisses iv) für lineare Abbildungen automatisch mit erfüllt wird.

Hier müssen wir nun im Gegensatz zu den anderen Aufgaben nichts hinzufügen! Da $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig ist, bildet dies bereits eine Basis des 3-dimensionalen Raums U . Da $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U ist und $v_1, v_2, v_3 \in V$, existiert laut [Sin20, Satz 6.1.13] eine lineare Ausdehnung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \varphi(u_3) = v_3$$

gelten. Insbesondere sind Bedingungen i)–iii) erfüllt. Also lautet wie oben argumentiert, die Antwort auf die Originalfrage: Ja! ◇

Frage 1.15 Gibt es eine

- | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|
| b) injektive | c) surjektive | d) bijektive |
| b') nicht-injektive | c') nicht-surjektive | d') nicht-bijektive |

lineare Abbildung, $\varphi : U \rightarrow V$, so dass i)–iv) erfüllt sind? ◇

Lösung. Da $\dim(U) = \dim(V)$, sind **b), c), d)** äquivalent und genauso sind **b'), c'), d)** äquivalent, da für lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen gleicher Dimensionen Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität äquivalent sind. Darum reicht es aus, nur **c)** und **c')** zu behandeln.

Sei nun $\varphi : U \rightarrow V$ eine beliebige lineare Abbildung, die i)–iv) erfüllt (laut der letzten Aufgabe existiert mindestens eine). Da φ eine Ausdehnung und linear ist und da $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\varphi) &= \varphi(\text{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}) \\ &= \text{Lin}\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \varphi(u_3)\} \\ &= \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}. \end{aligned}$$

Nun ist $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ linear unabhängig und bildet somit eine Basis des 3-dimensionalen Vektorraums, V . Darum gilt $\text{Bild}(\varphi) \cong V$, sodass φ surjektiv ist. Da φ beliebig war, haben wir tatsächlich gezeigt, dass alle lineare Ausdehnungen von i)–iv) surjektiv sind. Darum lautet die Antwort auf **c)** (und **b)** und **d))** Ja und auf **c')** (und **b')** und **d'))** Nein. ◇

Bemerkung 1.16 Laut [Sin20, Satz 6.1.13] die für Frage 1.14 konstruierte lineare Abbildung, φ , eindeutig. Da wir keine freie Wahl trafen, gibt es also exakt eine lineare Abbildung, die i)–iv) erfüllt. Darum ist die letzte Frage eigentlich »Ist die lineare Ausdehnung injektiv/nicht-injektiv/...?«. ◇

Bemerkung 1.17 Wir hätten die o. s. Aufgabe so aufstellen können, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig wäre. Dann hätte die lineare Ausdehnung den Rang < 3 . Die Antworten auf **c), b), d))** würden dann »Nein« lauten, und auf **c'), b'), d'))** »Ja«. ◇

Literaturverzeichnis

- [Jec97] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, 1997.
- [Sin20] Rainer Sinn. *Lineare Algebra I: Skript zur Veranstaltung Universität Leipzig. Vorlesungsskript*, 2020.
- [Wal16] Stefan Waldmann. *Lineare Algebra 1: Die Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.