Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$F = \neg\left(A\left(f(x_2, x_2)\right) \wedge B(b)\right) \rightarrow \exists x_2\, P(x_1, c, x_2)$$

frei frei geb.

$FV(F) = \{x_1, x_2\}$ „freie Variablen"

$GV(F) = \{x_2\}$ „gebundene Variablen"

Relⁿ		Fkt		Konst
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

Nebendiskussion

$$\{ \emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)} \}$$

$$\forall x. \left((\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)) \wedge P(\mathbb{1}) \right)$$

Sem 4.2

(a) $\neg \exists x \exists y\ \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

oder: $\forall x \neg \exists y\ \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$$\Phi(x) :\equiv \neg \exists y \left(\text{Teilt}^{(2)}(y, x) \wedge \text{GrößerAls}^{(2)}(\text{MinusDrei}^{(1)}(x), y) \right)$$

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: R/2

Literatur: $\underbrace{\#}_{\text{dt. „Stelligkeit", en. 'valence', 'arity', usw.}}(R) = 2$ (od. andere Fktsymbol statt #)

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c),x)$. Dann $\mathrm{Sym}(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $\mathcal{U} = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad f^I : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$: (u,v) \longmapsto u$

$c^I := 1000$

$x^I := 1$

② $R^J := \emptyset$, $\quad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c),x)$ und $J \not\models R(f(x,c),x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1,1000),1)$
  $= (1,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} = R^I$,

  sodass $I \models R(f(x,c),x)$
- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1,1000),1)$
  $= (1,1) \notin \emptyset = R^J$,

  sodass $J \not\models R(f(x,c),x)$

(b) $\mathcal{U}$ = Menge aller Farben = {Rot, Blau, ...}

R^K = {(Rot, Rot), (Blau, Blau), ...}

$f(\text{Farbe}_1, \text{Farbe}_2)$ = Farbe 50% gw. beiden

c^K = Lila

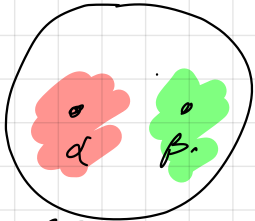
x^K = Lila.

Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila},\text{Lila}),\text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c),x)$.

Sem 4.5

(a) keine Tautologie



Betrachte die Formeln $F = R(x)$
$G = S(x)$

Betracht Universum + Interp:
$\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}, \quad R^{\mathcal{I}} = \{\alpha\}, \quad S^{\mathcal{I}} = \{\beta\}$.

Dann für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt $x^{\mathcal{I}_{[x \mapsto u]}} = u \in R^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}_{[x \mapsto u]}}$
od. $\in S^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}_{[x \mapsto u]}}$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models R(x)$ od. $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models S(x)$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models \underbrace{R(x) \vee S(x)}_{F \vee G}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{I} \models \forall x \, (F \vee G)$ ✱

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{\mathcal{I}_{[x \mapsto u]}} = u \notin S^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}_{[x \mapsto u]}}$
Also $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{I} \not\models \underbrace{\forall x \; S(x)}_{\forall x \; G}$ ✱✱

Analog lässt sich argumentieren: $\mathcal{I} \not\models \forall x \; F$ ✱✱✱

Aus ✱✱ + ✱✱✱ erhält man
$\mathcal{I} \not\models \forall x \, F \vee \forall x \, G$ ✱✱✱✱

Aus ✱ + ✱✱✱✱ folgt also $\mathcal{I} \not\models \forall x \, (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x \, F \vee \forall x \, G)$.

Insbesondere ist $\forall x \, (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x \, F \vee \forall x \, G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\,(F \to G)$$

$$\equiv \forall x\,(\neg F \vee \underline{G}).$$

$$\equiv (\forall x\ \neg F) \vee G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$

$$\equiv (\neg \exists x\, F) \vee G$$

$$\equiv \exists x\, F \to G.$$

Also ist $\forall x (F \to G) \leftrightarrow (\exists x\, F \to G)$ eine <u>Taut.</u>

(c) ~~Keine~~ Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$U = \mathbb{N}$, $P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$

$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ $P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$

In all diesen Interp. kann man zeigen:

$I \models \forall x\, \exists y\, P(x,y)$ aber $I \not\models \exists y\, \forall x\, P(x,y)$

Darum $I \not\models \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$.

Also ist $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$ <u>keine Taut.</u>

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(F, I, J) :=$ I, J Interp. (über $\mathcal{U}$) mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$.

Beh. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

bezeichne dies $\Phi(F)$: Für alle Interp. I, J (über $\mathcal{U}$) falls $\Psi(F, I, J)$, dann $I \models F$ gdw. $J \models F$.

Beweis.

Wir zeigen per str. Ind. (über Teilformelbeziehung), dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

Sei $F \in \mathcal{F}$.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

In (2)–(6) nehme man an, alle Teilfml von F liegen in $\mathcal{E}$.

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(G) \subseteq Sym(F)$ gilt, auch $\Psi(G, I, J)$. (*)

Per Ind ($\Phi(G)$ gilt) und wegen (*), erhält man

$I \models G$ gdw. $J \models G$

$\Downarrow$

$I \not\models G$ gdw. $J \not\models G$

$\Downarrow$ Def$^{\underline{n}}$ von $\models$ für $\neg$

$I \models \neg G$ gdw. $J \models \neg G$

$\Downarrow$

$I \models F$ gdw. $J \models F$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

→

(3) $F = G_1 \wedge G_2$, also $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(G_1) \subseteq Sym(F)$ und $Sym(G_2) \subseteq Sym(F)$, gelten auch

(*) $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$

Dann

$$
\begin{aligned}
& I \models F \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\iff}\ & I \models G_1 \wedge G_2 \\
\iff\ & I \models G_1 \text{ und } I \models G_2 \\
& \ \ \Updownarrow ** \qquad\qquad \Updownarrow *** \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\iff}\ & J \models G_1 \text{ und } J \models G_2 \\
\iff\ & J \models G_1 \wedge G_2 \\
\iff\ & J \models F
\end{aligned}
$$

Begründung von ** + ***:
- per Ind ($\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten), und
- wegen (*).

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$

[⤳ übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

(5) $F = \exists x\, G$, also $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $\mathrm{Sym}(F) = \mathrm{Sym}(G) \cup \{x\}$,

(*) gelten: $\Psi(G, I, J)$ und $x^I = x^J$.

Für alle $u \in \mathcal{U}$ beobachte, dass

für alle $s \in \mathrm{Sym}(G)$

$$s = x \implies s^{I[x \mapsto u]} = u = s^{J[x \mapsto u]}$$

$$s \neq x \implies s^{I[x \mapsto u]} = s^I \overset{(*)}{=} s^J = s^{J[x \mapsto u]}$$

(**) Darum $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$ für alle $u \in \mathcal{U}$.

Dann

$$I \models F$$

$$\overset{\text{Def}^n}{\iff} I \models \exists x\, G$$

$$\iff \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } I_{[x \mapsto u]} \models G$$

$$\Updownarrow *$$

$$\overset{\text{Def}^n}{\iff} \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } J_{[x \mapsto u]} \models G$$

$$\iff J \models \exists x\, G$$

$$\iff J \models G$$

Begründung von *:
- per Ind. ($\Phi(G)$ gilt), und
- wegen (**)

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x\, G$

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

→

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1) – (6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt,

für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen $(\mathcal{U}, \cdot^I)$, $(\mathcal{U}, \cdot^J)$

<u>falls</u> $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$,

<u>dann</u> $I \models F$ gdw. $J \models F$

$\square$

(Beweisende)