Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$F = \neg(A(f(x_2, x_2)) \wedge B(b)) \rightarrow \exists x_2\, P(x_1, c, x_2)$$

frei   frei   geb.

$FV(F) = \{x_1, x_2\}$ „freie Variablen"

$GV(F) = \{x_2\}$ „gebundene Variablen"

Rel^n		Fkt		Konst
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

Nebendiskussion

$$\{\emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$$

$$\forall x. ((\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)) \wedge P(\mathbb{1}))$$

Korrektur: vorhin stand $\Phi(x) := \neg \exists y \dots$
Die Negation war natürlich falsch.

Sem 4.2

(a) $\neg \exists x \, \exists y \; GrößerAls^{(2)}(x,y)$

alternativ: $\forall x \; \neg \exists y \; GrößerAls^{(2)}(x,y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$$\Phi(x) :\equiv \exists y \left(Teilt^{(2)}(y,x) \wedge GrößerAls^{(2)}(MinusDrei^{(1)}(x), y) \right)$$

Zusatz: Die entsprechende Menge ist

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_{[x \mapsto n]} \models \Phi(x) \},$$

wobei $(\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{I}})$ „die Standardinterpretation" für die Symbole

$\{ Teilt^{(2)}, GrößerAls^{(2)}, MinusDrei^{(1)} \}$

bezeichnet.

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: $R/2$

Literatur: $\underbrace{\#(R)}_{} = 2$ (od. andere Fktsymbol statt $\#$)

dt. „Stelligkeit"
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c), x)$. Dann $Sym(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $U = \mathbb{N}$

Wähle (1) $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad f^I : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\qquad : (u, v) \longmapsto u$

$c^I := 1000$

$x^I := 1$

(2) $R^J := \emptyset$, $\quad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c), x)$ und $J \not\models R(f(x,c),x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1, 1000), 1)$
  $= (1,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} = R^I$,

  sodass $I \models R(f(x,c), x)$
- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1, 1000), 1)$
  $= (1,1) \notin \emptyset = R^J$,

  sodass $J \not\models R(f(x,c), x)$

(b) U = Menge aller Farben = { Rot, Blau, ... }

R^K = { (Rot, Rot), (Blau, Blau), ... }

f (Farbe_1 , Farbe_2) = Farbe 50% gw. beiden

c^K = Lila

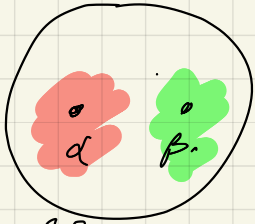
x^K = Lila.

Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila}, \text{Lila}), \text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c), x)$.

Sem 4.4

(a) keine Tautologie



Betrachte die Formeln $F = R(x)$

$G = S(x)$

Betracht Universum + Interp.:

$\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}$, $R^{I} = \{\alpha\}$, $S^{I} = \{\beta\}$.

Dann für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt $x^{I_{[x \mapsto u]}} = u \in R^{I} = R^{I_{[x \mapsto u]}}$

od. $\in S^{I} = S^{I_{[x \mapsto u]}}$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $I_{[x \mapsto u]} \models R(x)$ od. $I_{[x \mapsto u]} \models S(x)$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $I_{[x \mapsto u]} \models \underbrace{R(x) \vee S(x)}_{F \vee G}$

$\Rightarrow$ $I \models \forall x \, (F \vee G)$ $\ast$

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{I_{[x \mapsto u]}} = u \notin S^{I} = S^{I_{[x \mapsto u]}}$

Also $I_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $I_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ $I \not\models \underbrace{\forall x \; S(x)}_{\forall x \; G}$ $\ast\ast$

Analog lässt sich argumentieren: $I \not\models \forall x \; F$ $\ast\ast\ast$

Aus $\ast\ast$ + $\ast\ast\ast$ erhält man

$I \not\models \forall x \, F \vee \forall x \, G$ $\ast\ast\ast\ast$

Aus $\ast$ + $\ast\ast\ast\ast$ folgt also $I \not\models \forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$.

Insbesondere ist $\forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\,(F \to G)$$
$$\equiv \forall x\,(\neg F \vee G).$$
$$\equiv (\forall x\,\neg F) \vee G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$
$$\equiv (\neg \exists x\, F) \vee G$$
$$\equiv \exists x\, F \to G.$$

Also ist $\forall x\,(F \to G) \leftrightarrow (\exists x\, F \to G)$ eine Taut.

(c) ~~Keine~~ Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$

$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ $\quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$

In all diesen Interp. kann man zeigen:

$I \models \forall x\, \exists y\, P(x,y)$ aber $I \not\models \exists y\, \forall x\, P(x,y)$

Darum $I \not\models \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$.

Also ist $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$ keine Taut.

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(X, I, J) :=$ I, J Interp. mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(X)$.

↑ Fml od. Term (über $\mathcal{U}$)

$\Phi(F) :=$ Für alle Interp I, J: <u>falls</u> $\Psi(F, I, J)$, <u>dann</u> $I \models F$ gdw. $J \models F$.

Fml

$\Phi(t) :=$ Für alle Interp I, J: <u>falls</u> $\Psi(t, I, J)$, <u>dann</u> $t^I = t^J$.

Term

Behauptung. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $\Phi(F)$. } Dies entspricht der Aufgabe. (Warum?)

Beweis. Wir zeigen per str. Ind., dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

(1) Sei $F = R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$, R ein Relnsymbol, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$

Z: $\Phi(F)$ gilt.

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

(2) Sei $F = \neg G$, wobei $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = \neg G$, haben wir $Sym(F) = Sym(G)$.
Daraus erhalten wir

$$s \in Sym(G) \Longrightarrow s \in Sym(F) \xRightarrow{\Psi(F,I,J)} s^I = s^J.$$

D.h. $\Psi(G, I, J)$ gilt. Per Ind., da $\Phi(G)$ gilt, erhalten wir

(*) $I \models G \Longleftrightarrow J \models G$.

Dann

$$I \models F \Longleftrightarrow I \models \neg G \Longleftrightarrow I \not\models G$$

Def$^{\underline{n}}$ von $\models$ für $\neg$

$$\Updownarrow (*)$$

$$J \not\models G \Longleftrightarrow J \models \neg G \Longleftrightarrow J \models F.$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

⟶

(3) Sei $F = G_1 \wedge G_2$, wobei $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

$\underline{Z}$: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = G_1 \wedge G_2$, haben wir $Sym(F) = Sym(G_1) \cup Sym(G_2)$.
Daraus erhalten wir:

$$s \in Sym(G_1) \Longrightarrow s \in Sym(F) \xrightarrow{\Psi(F,I,J)} s^I = s^J$$

$$s \in Sym(G_2) \Longrightarrow s \in Sym(F) \xrightarrow{\Psi(F,I,J)} s^I = s^J$$

D.h. $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$ gelten.
Per Ind., da $\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten,
erhalten wir:

(*) $I \models G_1 \Longleftrightarrow J \models G_1$ und $I \models G_2 \Longleftrightarrow J \models G_2$.

Dann

$$
\begin{array}{lll}
 & & I \models F \\
\text{Def}^{\underline{n}} \text{ von } \models \text{ für } \wedge & \Longleftrightarrow & I \models G_1 \wedge G_2 \\
 & \Longleftrightarrow & I \models G_1 \text{ und } I \models G_2 \\
 & & \quad\Updownarrow (*) \qquad\qquad \Updownarrow (*) \\
\text{Def}^{\underline{n}} \text{ von } \models \text{ für } \wedge & \Longleftrightarrow & J \models G_1 \text{ und } J \models G_2 \\
 & \Longleftrightarrow & J \models G_1 \wedge G_2 \\
 & \Longleftrightarrow & J \models F
\end{array}
$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) Sei $F = G_1 \wedge G_2$, wobei $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

$\underline{Z}$: $\Phi(F)$ gilt.

[$\rightsquigarrow$ **übung!**] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

(5) Sei $F = \exists x\, G$, wobei x eine Var ein $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = \exists x\, G$, haben wir $Sym(F) = Sym(G) \setminus \{x\}$.

(*) Daraus folgt $Sym(G) \subseteq Sym(F) \cup \{x\}$. (warum?)

Für $u \in \mathcal{U}$ gelten:

(Δ)

$$s \in Sym(F) \Rightarrow s \neq x, \text{ also } \underbrace{s^{I[x \mapsto u]} = s^{I}}_{\text{weil } s \neq x} \overset{\text{weil } \Psi(F,I,J)}{=} \underbrace{s^{J} = s^{J[x \mapsto u]}}_{\text{weil } s \neq x}$$

$$s = x \Rightarrow s^{I[x \mapsto u]} = u = s^{J[x \mapsto u]}.$$

Da $Sym(G) \overset{(*)}{\subseteq} Sym(F) \cup \{x\}$, folgt aus ($\Delta$) dass $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Per Ind., da $\Phi(G)$ gilt, erhalten wir daraus, dass

(**) $I_{[x \mapsto u]} \models G \iff J_{[x \mapsto u]} \models G$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Dann

$$I \models F$$

$$\iff I \models \exists x\, G$$

Def$^{\models}$ von $\models$ für $\exists$: $\iff$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $I_{[x \mapsto u]} \models G$

$$\Updownarrow (**)$$

$\iff$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $J_{[x \mapsto u]} \models G$

Def$^{\models}$ von $\models$ für $\exists$: $\iff J \models \exists x\, G$

$$\iff J \models F$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) Sei $F = \forall x\, G$, wobei x eine Var ein $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

[$\rightsquigarrow$ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1)-(6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{I}})$, $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{J}})$,

$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{falls}} \quad s^{\mathcal{I}} = s^{\mathcal{J}} \text{ für alle } s \in Sym(F), \\ \underline{\text{dann}} \quad \mathcal{I} \models F \text{ gdw. } \mathcal{J} \models F. \end{array}\right\} \Phi(F)$

$\square$

(Beweisende)

Dies ist nur eine Vorlage. Die wesentliche Arbeit bleibt zu lösen.

Hinweis₁ zu HA 4.5(a)

Beh. Seien $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{I}})$, $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{J}})$ Interpretationen und $F \in \mathcal{F}$ eine Fml.
Angenommen, $s^{\mathcal{I}} = s^{\mathcal{J}}$ für alle $s \in Sym(F)$.
Dann für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ mit $Sym(t) \subseteq Sym(F)$ gilt $t^{\mathcal{I}} = t^{\mathcal{J}}$.

Bew. Sei $\mathcal{T}(t) := \{\tilde{t} \in \mathcal{T} \mid \tilde{t} \text{ in } t \text{ enthalten od. } \tilde{t} = t\}$.
Wir zeigen per str. Ind. über die Teilausdruckbeziehung, dass

$$\tilde{t}^{\mathcal{I}} = \tilde{t}^{\mathcal{J}}$$

für alle $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$.

Sei $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$ beliebig. Angenommen $\overbrace{\tilde{t}'^{\mathcal{I}} = \tilde{t}'^{\mathcal{J}} \text{ für alle Teilausdrücke von } \tilde{t}}^{\text{Dies ist die IV}}$.

Fall 1 $\quad \tilde{t} = x$, x eine Variable.

Frage: Ist $x \in Sym(F)$?
Wie zeigt man dies?
Wie nütze man die Eigenschaften von $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ aus, um zu zeigen, dass $\tilde{t}^{\mathcal{I}} = \tilde{t}^{\mathcal{J}}$?

Fall 2 $\quad \tilde{t} = c$, c eine Konstante

Hinweis: wie beim 1. Fall.

Fall 3 $\quad \tilde{t} = f(\tilde{t}_1', \tilde{t}_2', \dots, \tilde{t}_n')$ mit f Fktsymbol (n-stellig) und $\tilde{t}_1', \tilde{t}_2', \dots, \tilde{t}_n' \in \mathcal{T}$.

Frage: Was kann man über $\tilde{t}_i'^{\mathcal{I}}$ und $\tilde{t}_i'^{\mathcal{J}}$?
Wie begründet man das?

Frage: Ist $f \in Sym(F)$? Wie zeigt man dies?
Wie nützt man die Eigenschaften von $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ aus, um zu zeigen, dass $\tilde{t}^{\mathcal{I}} = \tilde{t}^{\mathcal{J}}$?

Per str. Ind. gilt $\tilde{t}^{\mathcal{I}} = \tilde{t}^{\mathcal{J}}$ für alle $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$.
Insbesondere gilt dies für t. Darum gilt die Behauptung. $\square$

(Variante, die zu Seiten 6-9 aus diesem Dokument passen.)

Hinweis zu HA 4.5(a)

Beh. Für alle Terme $t \in T$ gilt $\Phi(t)$. } Dies entspricht der Aussage in 4.5(a). (Warum?)

Bew. Sei $\mathcal{E} := \{ t \in T \mid \Phi(t) \}$. Wir zeigen per str. Ind., dass $\mathcal{E} = \mathcal{T}$.

(1) Sei t eine Variable od. Konstante.

Z: $\Phi(t)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(I, J, t)$.
D.h. $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(t)$.

Anhand dieser Infos zeige jetzt, dass $t^I = t^J$
Hinweis: wie sieht $Sym(t)$ aus?

Darum gilt $\Phi(t)$, d.h. $t \in \mathcal{E}$.

(2) Sei $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$, f n-stellige Fktsymbol, und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{E}$.

Z: $\Phi(t)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(t, I, J)$.
D.h. $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(t)$.
Da $\boxed{?}$, gilt $\Psi(t_i, I, J)$ für alle i.
Per Ind gilt also $\boxed{?}$ für alle i. (*)
Da $f \in Sym(t)$, gilt auch $\boxed{?}$. (**)
Aus (*) + (**) folgt

$$t^I = (f(t_1, \ldots, t_n))^I = \boxed{? = ? = ?} = t^J.$$

Darum gilt $\Phi(t)$, d.h. $t \in \mathcal{E}$.

Aus (1) + (2) folgt per $\boxed{?}$, dass $\mathcal{E} = \mathcal{T}$.
D.h. für alle Terme t, und alle Interp I, J mit $\boxed{???}$ gilt $\boxed{?}$. □