

Seminarauf. / Serie 2

12. Mai 2021

Sem 2.1

✓ a) $I \models \emptyset \stackrel{\text{Def}^n}{\iff}$ für alle F in \emptyset gilt $I \models F$

wahr, weil über leerer Menge quantifiziert wird
Cavalog $\bigwedge_{\text{leer}} \equiv \top$; $\bigvee_{\text{leer}} \equiv \perp$

Darum ist wahr.

ABER: dies sagt uns gar nicht über \bigwedge bzw. \bigvee .

✗ b) I erf. $\{A_{278}, \neg A_{278}\}$ nicht, weil $\text{eval}(A_{278}, I) = 0$.
Darum ist Aussage in Aufgabe falsch.

✓ c) $I \models A_{278} \vee \neg A_{278} :$
es gilt $\text{eval}(A_{278} \vee \neg A_{278}, I)$
 $= \max\{\text{eval}(A_{278}, I), 1 - \text{eval}(A_{278}, I)\}$
 $= \max\{0, 1\} = 1.$

$\Rightarrow I$ erf. Formel

\Rightarrow Aussage ist wahr.

✓d) $I \models \{ \neg H \mid H \in \mathcal{F}, H \text{ nicht erf.} \} := \Gamma$:

Sei $H \in \mathcal{F}$. Dann H nicht erf.
 $\Rightarrow \neg H$ tautologisch
 \Rightarrow alle Modelle erf. $\neg H$
 \Rightarrow insbesondere: I erf. $\neg H$.

I erf. alles in der Menge Γ .

Darum $I \models \Gamma$, d.h. die Aussage stimmt.

✓e) $I \models \{ \neg A_1, \neg A_1 \rightarrow (A_0 \rightarrow A_{10}) \} := \Sigma$.

$\neg A_1$: $I \models \neg A_1$, weil $I \not\models A_1$,
weil $A_1 \notin I$.

$\neg A_1 \rightarrow (A_0 \rightarrow A_{10})$:

- $I \models A_0 \rightarrow A_{10}$,
weil $(I \models A_0 \Rightarrow I \models A_{10})$
weil $I \not\models A_0$.

- Da $I \models \neg A_1$ und $I \models A_0 \rightarrow A_{10}$,
gilt $I \models \neg A_1 \rightarrow (A_0 \rightarrow A_{10})$.

daraus folgt $I \models \Sigma$.

Also ist die Aussage wahr.

Sem 2.2

Sprachlich	Mathe	bspw. Java
dasselbe / identisch	=	===
das Gleiche / äquiv.	≡	==

a) DNF **IDEE**: alle **1**-er-Zeilen \rightsquigarrow pos Lit $\rightsquigarrow A$
neg Lit $\rightsquigarrow \neg A$

$$H \equiv (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \\ \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3).$$

b) KNF **IDEE**: alle **0**-er-Zeilen \rightsquigarrow pos Lit $\rightsquigarrow \neg A$
neg Lit $\rightsquigarrow A$

$$H \equiv (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \\ \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3)$$

Sem 2.3

a) ✓ $((A_1 \wedge A_5) \rightarrow A_3) \wedge (A_2 \rightarrow A_4)$

b) ✗ keine Hornform, weil >1 pos. Lit
im zweiten Disjunktionsglied

c) ✓ $(A_1 \rightarrow \perp) \wedge (T \rightarrow A_2)$

d) ✓ $((A_3 \wedge A_4 \wedge A_5 \wedge A_{10}) \rightarrow \perp)$

e) ✓ $((A_3 \wedge A_5 \wedge A_{10}) \rightarrow A_4)$

f) ✓ $(A_5 \rightarrow \perp) \wedge (A_8 \rightarrow \perp) \wedge (A_{13} \rightarrow \perp)$

Sem 2.4: Ausführung wie in der ÜG (siehe Aufzeichnung) =

		F					
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	\perp
0		•	•				
1		•	•		•		
2		•	•		•	•	
4							
— terminiert —							
5							
6							
7							

		G					
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	\perp	
0	•						
1	•			•			
2	•			•	•		
3	•		•	•	•		
4	•		•		•	•	
6							
— terminiert —							

Wenn man diese „schnellere“ Variante anwendet, sähen die Entwicklungen der Markierungen so aus:

		F					
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	\perp
0		•	•				
1		•	•		•	•	
3							
— terminiert —							
4							
5							
6							
7							

		G					
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	\perp	
0	•						
1	•			•	•		
2	•		•	•	•	•	
4							
— terminiert —							
5							
6							

Deutung der Markierungen:

Für F: Da \perp nicht markiert, **erfüllbar** laut Thm §30. Aus dem Endzustand geht $I = \{A_1, A_2, A_4, A_5\}$ als eine Interpretation für F hervor.

Für G: Da \perp markiert, **nicht erfüllbar** laut Thm §30.

Sem 2.5

Beh. $d(F) < w(F)$ für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$.

Beweis Es reicht per **str. Ind.** zu zeigen

dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, wobei

$\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid d(F) < w(F)\}$. Dies machen wir wie folgt.

i) Z: $A_i \in \mathcal{E}$ für alle Atome A_i :
Es gilt $d(A_i) \stackrel{\text{Def}^2}{=} 0 < 1 \stackrel{\text{Def}^2}{=} w(A_i)$ } \Rightarrow per Konstruktion liegt A_i in \mathcal{E} .

ii) Sei $F \in \mathcal{E}$, d.h. $d(F) < w(F)$.

Z: $\neg F \in \mathcal{E}$.

Es gilt $d(\neg F) \stackrel{\text{Def}^2}{=} d(F) + 1 < w(F) + 1 \stackrel{\text{Def}^2}{=} w(\neg F)$
 $< w(F)$ Wegen Monotonie von Addition

$\Rightarrow \neg F \in \mathcal{E}$.

iii) Seien $G, H \in \mathcal{E}$, d.h. $d(G) < w(G)$ und $d(H) < w(H)$.

Z: $(G \wedge H) \in \mathcal{E}$.

Es gilt $d((G \wedge H)) \stackrel{\text{Def}^2}{=} \max\{d(G), d(H)\} + 1$
 $< w(G) < w(H)$

können mathematisch begründet werden. Aber es reicht, solche basic Manipulationen einfach so zu benutzen.

$< \max\{w(G), w(H)\} + 1$

$\leq w(G) + w(H) + 1$

$\stackrel{\text{Def}^2}{=} w((G \wedge H))$

$\Rightarrow d((G \wedge H)) < w((G \wedge H))$

$\Rightarrow (G \wedge H) \in \mathcal{E}$

iv) Seien $G, H \in \mathcal{E}$.

$\bar{Z}: (G \vee H) \in \mathcal{E}$.

Da nun $d(\cdot)$ bzw. $w(\cdot)$ für den \vee -Fall genauso definiert werden wie für den \wedge -Fall, ist das Argument hier analog zu dem für iii).

ACHTUNG dies gilt zwar hier, aber nicht i. A.
Nur mit Vorsicht so etwas machen!!

Aus i)–iv) folgt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Insbesondere gilt $d(F) < w(F)$ für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$.

