

Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4. 1

$$F = \neg (A(f(x_1, x_2)) \wedge B(b)) \rightarrow \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

keine Variable sondern Konst.
↑ frei ↑ frei ↑ geb.

$$FV(F) = \{x_1, x_2\}$$

„freie Variablen“

$$GV(F) = \{x_2\}$$

„gebundene Variablen“

<u>Relⁿ</u>	<u>Fkt</u>	<u>Konst</u>
A	f	b
B		
P	b	

1-stellig 2-stellig 0-stellig (konstante)

Neben diskussion

$$\{\emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$$

$$\forall x. ((\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)) \wedge P(\mathbb{1}))$$

Sem 4.2

$$(a) \quad \neg \exists x \exists y \text{ Grö\ss}erAls^{(2)}(x, y)$$

$$\text{oder: } \forall x \neg \exists y \text{ Grö\ss}erAls^{(2)}(x, y)$$

$$(b) \quad \Phi(x) \equiv x \text{ habe einen Teiler } \dots$$

$$\Phi(x) := \neg \exists y \left(\text{Teilt}^{(2)}(y, x) \wedge \text{Grö\ss}erAls^{(2)}(\text{MinusDrei}^{(1)}(x), y) \right)$$

Ann. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: $R/2$

Literatur: $\#(R) = 2$ (od. andere Festsymbol statt $\#$)

dt. „Stelligkeit“
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x, c), x)$. Dann $\text{Sym}(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $U = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $f^I: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $: (a, v) \mapsto a$

$$c^I := 1000$$

$$x^I := 1$$

② $R^J := \emptyset$, $f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

\mathbb{Z} : $I \models R(f(x, c), x)$ und $J \not\models R(f(x, c), x)$

Es gilt:

$$\begin{aligned} - (f(x, c)^I, x^I) &= (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1, 1000), 1) \\ &= (1, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} = R^I, \end{aligned}$$

sodass $I \models R(f(x, c), x)$

$$\begin{aligned} - (f(x, c)^J, x^J) &= (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1, 1000), 1) \\ &= (1, 1) \notin \emptyset = R^J, \end{aligned}$$

sodass $J \not\models R(f(x, c), x)$

(b) $U = \text{Menge aller Farben} = \{\text{Rot, Blau, ...}\}$

$$R^K = \{(\text{Rot, Rot}), (\text{Blau, Blau}), \dots\}$$

$f(\text{Farbe}_1, \text{Farbe}_2) = \text{Farbe } 50\% \text{ zw. beiden}$

$$c^K = \text{Lila}$$

$$x^K = \text{Lila.}$$

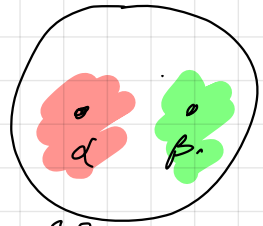
$$\begin{aligned} \text{Dann } (f(x, c)^K, x^K) &= (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila, Lila}), \text{Lila}) \\ &= (\text{Lila, Lila}) \in R^K \end{aligned}$$

$\Rightarrow K \models R(f(x, c), x)$.

Sem 4.5

(a) keine Tautologie

Betrachte die Formeln $F = R(x)$
 $G = S(x)$



Betracht Universum + Interp:

$$U = \{\alpha, \beta\}, \quad R^I = \{\alpha\}, \quad S^I = \{\beta\}.$$

Dann für alle $u \in U$ gilt $x^{I[x \mapsto u]} = u \in R^I = R^{I[x \mapsto u]}$
od. $\in S^I = S^{I[x \mapsto u]}$

\Rightarrow für alle $u \in U$: $I[x \mapsto u] \models R(x)$ od. $I[x \mapsto u] \models S(x)$

\Rightarrow für alle $u \in U$: $I[x \mapsto u] \models \underbrace{R(x) \vee S(x)}_{F \vee G}$

$\Rightarrow I \models \forall x (F \vee G)$ *

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{I[x \mapsto u]} = u \notin S^I = S^{I[x \mapsto u]}$
Also $I[x \mapsto u] \not\models S(x)$

\Rightarrow ein $u \in U$ existiert mit $I[x \mapsto u] \not\models S(x)$

$\Rightarrow I \not\models \underbrace{\forall x S(x)}_{\forall x G}$ **

Analog lässt sich argumentieren: $I \not\models \forall x F$ ***

Aus ** + *** erhält man

$I \not\models \forall x F \vee \forall x G$ ****

Aus * + **** folgt also $I \not\models \forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$.

Insbesondere ist $\forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\begin{aligned} & \forall x (F \rightarrow G) \\ & \equiv \forall x (\neg F \vee G). \\ & \equiv (\forall x \neg F) \vee G. \quad \text{weil } x \notin FV(G) \\ & \equiv (\neg \exists x F) \vee G \\ & \equiv \exists x F \rightarrow G. \end{aligned}$$

Also ist $\forall x(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\exists x F \rightarrow G)$ eine Taut.

(c) Keine Tautologie

$$U = \mathbb{N}, \quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$U = \mathbb{N}, \quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$$

$$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$$

In all diesen Interp. kann man zeigen:

$$I \models \forall x \exists y P(x, y) \quad \text{aber} \quad I \not\models \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\text{Daher } I \not\models \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y).$$

Also ist $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ keine Taut.

Sem 4.5

Sei \mathcal{U} fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über \mathcal{U} .

$\Psi(F, I, J) := I, J \text{ Interp. mit } s^I = s^J \text{ für alle } s \in \text{Sym}(F) \text{ (über } \mathcal{U}\text{)}$

Beh. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

bezeichne dies $\Phi(F)$ } Für alle Interp. I, J (über \mathcal{U})
falls $\Psi(F, I, J)$, dann $I \models F$ gdw. $J \models F$.

Beweis.

Wir zeigen per str. Ind. (über Teilformelbeziehung), dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

Sei $F \in \mathcal{F}$.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).

[\Rightarrow Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

In (2)-(6) nehme man an, alle Teilform von F liegen in \mathcal{E} .

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Ξ : $\Phi(F)$ gilt

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

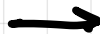
Da $\text{Sym}(G) \subseteq \text{Sym}(F)$ gilt, auch $\Psi(G, I, J)$.

Per Ind ($\Phi(G)$ gilt)

und wegen Ψ , erhält man

$$\begin{array}{l} I \models G \text{ gdw. } J \models G \\ \downarrow \\ I \not\models G \text{ gdw. } J \not\models G \\ \downarrow \\ I \models \neg G \text{ gdw. } J \models \neg G \\ \downarrow \\ I \models F \text{ gdw. } J \models F \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} I \models G \\ I \not\models G \\ I \models \neg G \\ I \models F \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Def'n von } F \\ \text{für } \neg \end{array}$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.



(3) $F = G_1 \wedge G_2$, also $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1), \Phi(G_2)$ gelten.

\underline{Z} : $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $\text{Sym}(G_1) \subseteq \text{Sym}(F)$ und $\text{Sym}(G_2) \subseteq \text{Sym}(F)$,
gelten auch

(*) $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$

Dann

Defⁿ $\left\{ \begin{array}{l} I \models F \\ \Leftrightarrow I \models G_1 \wedge G_2 \\ \Leftrightarrow \underbrace{I \models G_1}_{\Downarrow \heartsuit\heartsuit} \text{ und } \underbrace{I \models G_2}_{\Downarrow \heartsuit\heartsuit} \end{array} \right.$

Def^m $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \underbrace{J \models G_1}_{\Downarrow \heartsuit\heartsuit} \text{ und } \underbrace{J \models G_2}_{\Downarrow \heartsuit\heartsuit} \\ \Leftrightarrow J \models G_1 \wedge G_2 \\ \Leftrightarrow J \models F \end{array} \right.$

Begründung von $\heartsuit\heartsuit + \heartsuit\heartsuit$:
- per Ind
($\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten),
und
- wegen (*).

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$

[\rightsquigarrow Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.



(5) $F = \exists x G$, also $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

\exists : $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $\text{Sym}(F) = \text{Sym}(G) \cup \{x\}$,

\clubsuit gelten: $\Psi(G, I, J)$ und $x^I = x^J$.

Für alle $u \in U$ beobachte, dass

für alle $s \in \text{Sym}(G)$

$$s = x \Rightarrow s^{I[x \mapsto u]} = u = s^{J[x \mapsto u]}$$

$$s \neq x \Rightarrow s^{I[x \mapsto u]} = s^{I \clubsuit} = s^J = s^{J[x \mapsto u]}$$

$\clubsuit\clubsuit$ Darum $\Psi(G, I[x \mapsto u], J[x \mapsto u])$ für alle $u \in U$.

Dann

$$I \models F$$

$$\text{Def}^{\exists} \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow I \models \exists x G \\ \Leftrightarrow \text{ein } u \in U \text{ existiert mit } \end{array} \right.$$

$$\underbrace{I[x \mapsto u] \models G}$$

$$\Downarrow \clubsuit$$

$$\underbrace{J[x \mapsto u] \models G}$$

$$\text{Def}^{\exists} \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \text{ein } u \in U \text{ existiert mit} \\ \Leftrightarrow J \models \exists x G \\ \Leftrightarrow J \models F \end{array} \right.$$

Begründung von \clubsuit :

- per Ind. ($\Phi(G)$ gilt), und
- wegen $\clubsuit\clubsuit$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x G$

[\rightsquigarrow Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.



Per strukturelle Induktion haben wir durch
(1) – (6) gezeigt, dass $E = \mathcal{F}$. Das heißt,

für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle

Interpretationen $(U, \cdot^I), (U, \cdot^J)$

falls $s^I = s^J$ für alle $s \in \text{Sgm}(F)$,

dann $I \models F$ gdw. $J \models F$



(Beweisende)