Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$\neg\left(A\left(f(x_2, x_2)\right) \wedge B(b)\right) \rightarrow \exists x_2\ P(x_1, c, x_2)$$

frei (beide x_2 links) — frei (x_1) — geb. (x_2 rechts)

Rel.		Fkt		Konst.
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

Nebendiskussion

$$\{\emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$$

$$\forall x.\ \left(\left(\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)\right) \wedge P(\mathbb{1})\right)$$

Sem 4.2

(a) $\neg \exists x \exists y \; GrößerAls^{(2)}(x,y)$

oder: $\forall x \neg \exists y \; GrößerAls^{(2)}(x,y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$\Phi(x) :\equiv \neg \exists y \left(Teilt^{(2)}(y,x) \wedge GrößerAls^{(2)}(MinusDrei^{(1)}(x), y) \right)$

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: R /2

Literatur: $\underbrace{\#}(R) = 2$ (od. andere Fktsymbol statt #)

dt. „Stelligkeit"
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c),x)$. Dann $Sym(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $\mathcal{U} = \mathbb{N}$

Wähle (1) $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad f^I : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$: (u,v) \longmapsto u$

$c^I := 1000$

$x^I := 1$

(2) $R^J := \emptyset$, $\quad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c),x)$ und $J \not\models R(f(x,c),x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1,1000), 1)$
$= (1,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} = R^I$,
sodass $I \models R(f(x,c),x)$
- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1,1000), 1)$
$= (1,1) \notin \emptyset = R^J$,
sodass $J \not\models R(f(x,c),x)$

(b) $\mathcal{U}$ = Menge aller Farben = { Rot, Blau, ... }

R^K = { (Rot, Rot), (Blau, Blau), ... }

f(Farbe$_1$, Farbe$_2$) = Farbe 50% zw. beiden

c^K = Lila

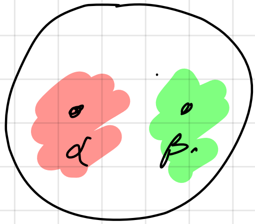
x^K = Lila.

Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila}, \text{Lila}), \text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c),x)$.

Sem 4.5

(a) keine Tautologie.



Sei $\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}$

$R^I = \{\alpha\}$

$S^I = \{\beta\}$.

Sei $F := R(x)$ $\quad G := S(x)$.

Dann

für alle $u \in \mathcal{U}$:

$$x^{I_{[x\mapsto u]}} = u \in R^{I_{[x\mapsto u]}} \text{ od. in } S^{I_{[x\mapsto u]}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{[x\mapsto u]} \models R(x)$$

oder $I_{[x\mapsto u]} \models S(x)$

$$\Rightarrow \quad I_{[x\mapsto u]} \models R(x) \vee S(x)$$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $\quad I_{[x\mapsto u]} \models F \vee G$

$\Rightarrow \quad \underline{I \models \forall x\, (F \vee G)}$ *

für $u = \alpha$: $\quad x^{I_{[x\mapsto u]}} = u = \alpha \notin S^{I_{[x\mapsto u]}}$

d.h. $\quad I_{[x\mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow \quad I \not\models \forall x\, S(x)$ $\quad$ d.h. $\underline{I \not\models \forall x\, G}$

analog können wir zeigen: $\underline{I \not\models \forall x\, F}$

Darum $\underline{I \not\models \forall x\, F \vee \forall x\, G}$. **

Aus $*$ und $**$ folgt:

$$I \not\models \forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$$

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\ (F \to G)$$

$$\equiv \forall x (\neg F \vee \underline{G}).$$

$$\equiv (\forall x\ \neg F) \vee G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$

$$\equiv (\neg \exists x\ F) \vee G$$

$$\equiv \exists x\ F \to G.$$

Also $\forall x (F \to G) \leftrightarrow (\exists x\ F \to G)$

(c) Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$

$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ $\quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$

in all diesen Interp. gilt

$I \models \forall x \exists y\ P(x, y)$ aber $I \not\models \exists y \forall x\ P(x, y)$

also $I \not\models$ " $\to$ "

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(F, I, J)$:⟺ I, J Interp. (über $\mathcal{U}$) mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$.

Beh. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

bezeichne dies $\Phi(F)$: Für alle Interp. I, J (über $\mathcal{U}$) falls $\Psi(F, I, J)$, dann $I \models F$ gdw. $J \models F$.

Beweis.

Wir zeigen per str. Ind. (über Teilformelbeziehung), dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

Sei $F \in \mathcal{F}$.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).

[⇝ übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

In (2)–(6) nehme man an, alle Teilfml von F liegen in $\mathcal{E}$.

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

$\not{Z}$: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(G) \subseteq Sym(F)$ gilt, auch $\Psi(G, I, J)$. ✱

Per Ind ($\Phi(G)$ gilt) und wegen ✱, erhält man

$$I \models G \text{ gdw. } J \models G$$
$$\Downarrow$$
$$I \not\models G \text{ gdw. } J \not\models G$$
$$\Downarrow \quad \text{Def}^{\underline{n}} \text{ von } \models \text{ für } \neg$$
$$I \models \neg G \text{ gdw. } J \models \neg G$$
$$\Downarrow$$
$$I \models F \text{ gdw. } J \models F$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(3) $F = G_1 \wedge G_2$, also $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

(*) Da $Sym(G_1) \subseteq Sym(F)$ und $Sym(G_2) \subseteq Sym(F)$, gelten auch $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$

Dann

$$
\begin{aligned}
& I \models F \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\iff}\ & I \models G_1 \wedge G_2 \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\iff}\ & I \models G_1 \text{ und } I \models G_2 \\
\iff\ & J \models G_1 \text{ und } J \models G_2 \\
\iff\ & J \models G_1 \wedge G_2 \\
\iff\ & J \models F
\end{aligned}
$$

per Ind ($\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten) und wegen (*)

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$

[$\rightsquigarrow$ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

(5) $F = \forall x\, G$, also $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(F) = Sym(G) \cup \{x\}$,
gelten: $\Psi(G, I, J)^{\dagger}$ und $x^I = x^J$.
Für alle $u \in U$ beobachte, dass
für alle $s \in Sym(G)$

$$s = x \Rightarrow s^{I[x \mapsto u]} = u = s^{J[x \mapsto u]}$$

$$s \neq x \Rightarrow s^{I[x \mapsto u]} = s^I \overset{(\dagger)}{=} s^J = s^{J[x \mapsto u]}$$

(**) Darum $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$ für alle $u \in U$.

Dann

$$
\begin{aligned}
& I \models F \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\Longleftrightarrow}\ & I \models \forall x\, G \\
\Longleftrightarrow\ & \text{für alle } u \in U:\ I_{[x \mapsto u]} \models G \\
\Longleftrightarrow\ & \text{für alle } u \in U:\ J_{[x \mapsto u]} \models G \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{\Longleftrightarrow}\ & J \models \forall x\, G \\
\Longleftrightarrow\ & J \models F
\end{aligned}
$$

per Ind ($\Phi(G)$ gilt) und wegen (**)

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x\, G$

[⇝ übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

→

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1) – (6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen $(\mathcal{U}, \cdot^I)$, $(\mathcal{U}, \cdot^J)$

<u>falls</u> $s^I = s^J$ für alle $s \in \mathrm{Sym}(F)$,

<u>dann</u> $I \models F$ gdw. $J \models F$

$\square$

(Beweisende)