

Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4. 1

$$F = \neg (A(f(x_1, x_2)) \wedge B(b)) \rightarrow \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

keine Variable
sondern Konst.

↑ frei ↑ frei ↑ geb.

$$FV(F) = \{x_1, x_2\}$$

„freie Variablen“

$$GV(F) = \{x_2\}$$

„gebundene Variablen“

Relⁿ

A 1-stellig

Fkt

f 2-stellig

Konst

b

B 1-stellig

P 3-stellig

b 0-stellig
(konstante)

Nebendiskussion

$$\{\emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$$

$$\forall x. ((\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)) \wedge P(\mathbb{1}))$$

Korrektur: vorher stand $\Phi(x) := \neg \exists y \dots$
Die Negation war natürlich falsch.

Sem 4.2

(a) $\neg \exists x \exists y \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

alternativ: $\forall x \neg \exists y \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

(b) $\Phi(x) \equiv x \text{ habe einen Teiler } \dots$

$$\Phi(x) := \exists y (\text{Teilt}^{(2)}(y, x) \wedge \text{GrößerAls}^{(2)}(\text{MinusDrei}^{(1)}(x), y))$$

Zusatz: Die entsprechende Menge ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_{[x \mapsto n]} \models \Phi(x)\},$$

wobei $(\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{I}})$ „die Standardinterpretation“ für die Symbole

$$\{\text{Teilt}^{(2)}, \text{GrößerAls}^{(2)}, \text{MinusDrei}^{(1)}\}$$

bezeichnet.

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: $R/2$

Literatur: $\#(R) = 2$ (od. andere Flutschymbol statt $\#$)

dt. „Stelligkeit“
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x, c), x)$. Dann $\text{Sym}(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $U = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $f^I: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $: (a, v) \mapsto a$

$$c^I := 1000$$

$$x^I := 1$$

② $R^J := \emptyset$, $f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

\mathbb{Z} : $I \models R(f(x, c), x)$ und $J \not\models R(f(x, c), x)$

Es gilt:

$$\begin{aligned} - (f(x, c)^I, x^I) &= (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1, 1000), 1) \\ &= (1, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} = R^I, \end{aligned}$$

sodass $I \models R(f(x, c), x)$

$$\begin{aligned} - (f(x, c)^J, x^J) &= (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1, 1000), 1) \\ &= (1, 1) \notin \emptyset = R^J, \end{aligned}$$

sodass $J \not\models R(f(x, c), x)$

(b) $U = \text{Menge aller Farben} = \{\text{Rot, Blau, ...}\}$

$$R^K = \{(\text{Rot, Rot}), (\text{Blau, Blau}), \dots\}$$

$f(\text{Farbe}_1, \text{Farbe}_2) = \text{Farbe } 50\% \text{ zw. beiden}$

$$c^K = \text{Lila}$$

$$x^K = \text{Lila.}$$

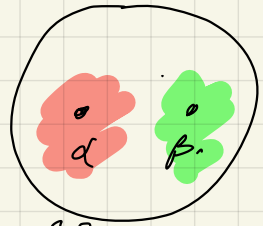
$$\begin{aligned} \text{Dann } (f(x, c)^K, x^K) &= (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila, Lila}), \text{Lila}) \\ &= (\text{Lila, Lila}) \in R^K \end{aligned}$$

$\Rightarrow K \models R(f(x, c), x)$.

Sem 4.4

(a) keine Tautologie

Betrachte die Formeln $F = R(x)$
 $G = S(x)$



Betracht Universum + Interp:

$$U = \{\alpha, \beta\}, \quad R^I = \{\alpha\}, \quad S^I = \{\beta\}.$$

Dann für alle $u \in U$ gilt $x^{I[x \mapsto u]} = u \in R^I = R^{I[x \mapsto u]}$
od. $\in S^I = S^{I[x \mapsto u]}$

\Rightarrow für alle $u \in U$: $I[x \mapsto u] \models R(x)$ od. $I[x \mapsto u] \models S(x)$

\Rightarrow für alle $u \in U$: $I[x \mapsto u] \models \frac{R(x) \vee S(x)}{F \vee G}$

$\Rightarrow I \models \forall x (F \vee G)$ *

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{I[x \mapsto u]} = u \notin S^I = S^{I[x \mapsto u]}$
Also $I[x \mapsto u] \not\models S(x)$

\Rightarrow ein $u \in U$ existiert mit $I[x \mapsto u] \not\models S(x)$

$\Rightarrow I \not\models \frac{\forall x S(x)}{\forall x G}$ **

Analog lässt sich argumentieren: $I \not\models \forall x F$ ***

Aus ** + *** erhält man

$I \not\models \forall x F \vee \forall x G$ ****

Aus * + **** folgt also $I \not\models \forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$.

Insbesondere ist $\forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\begin{aligned} & \forall x (F \rightarrow G) \\ & \equiv \forall x (\neg F \vee G). \\ & \equiv (\forall x \neg F) \vee G. \quad \text{weil } x \notin FV(G) \\ & \equiv (\neg \exists x F) \vee G \\ & \equiv \exists x F \rightarrow G. \end{aligned}$$

Also ist $\forall x(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\exists x F \rightarrow G)$ eine Taut.

(c) Keine Tautologie

$$U = \mathbb{N}, \quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$U = \mathbb{N}, \quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$$

$$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$$

In all diesen Interpret. kann man zeigen:

$$I \models \forall x \exists y P(x, y) \quad \text{aber} \quad I \not\models \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\text{Daher } I \not\models \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y).$$

Also ist $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ keine Taut.

Sem 4.5

Sei \mathcal{U} fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über \mathcal{U} .

$\Psi(x, I, J) := I, J \text{ Interp. mit } s^I = s^J \text{ für alle } s \in \text{Sym}(X).$
 \uparrow Fml od. Term (über \mathcal{U})

$\Phi(F) := \text{Für alle Interp } I, J: \text{ falls } \Psi(F, I, J), \text{ dann } I \models F \text{ gdw. } J \models F.$
Fml

$\Phi(t) := \text{Für alle Interp } I, J: \text{ falls } \Psi(t, I, J), \text{ dann } t^I = t^J.$
Term

Behauptung. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $\Phi(F)$. } Dies entspricht der Aufgabe (Warum?)

Beweis. Wir zeigen per str. Ind., dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

(1) Sei $F = R(t_1, t_2, \dots, t_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$, R ein Relnsymbol, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$
 $\mathcal{Z} : \Phi(F)$ gilt.

[\leadsto Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

(2) Sei $F = \neg G$, wobei $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.
 $\mathcal{Z} : \Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = \neg G$, haben wir $\text{Sym}(F) = \text{Sym}(G)$.

Daraus erhalten wir

$$s \in \text{Sym}(G) \Rightarrow s \in \text{Sym}(F) \xrightarrow{\Psi(F, I, J)} s^I = s^J.$$

D.h. $\Psi(G, I, J)$ gilt. Per Ind., da $\Phi(G)$ gilt, erhalten wir

(*) $I \models G \iff J \models G.$

Dann

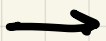
$$I \models F \iff I \models \neg G \iff I \not\models G$$

Defⁿ von F für \neg

$$\updownarrow (*)$$

$$J \not\models G \iff J \models \neg G \iff J \models F.$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.



(3) Sei $F = G_1 \wedge G_2$, wobei $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1), \Phi(G_2)$ gelten.

Ξ : $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $F = G_1 \wedge G_2$, haben wir $\text{Sym}(F) = \text{Sym}(G_1) \cup \text{Sym}(G_2)$.
Daraus erhalten wir:

$$s \in \text{Sym}(G_1) \implies s \in \text{Sym}(F) \xrightarrow{\Psi(F, I, J)} s^I = s^J$$

$$s \in \text{Sym}(G_2) \implies s \in \text{Sym}(F) \xrightarrow{\Psi(F, I, J)} s^I = s^J$$

D.h. $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$ gelten.

Per Ind., da $\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten, erhalten wir:

(*) $I \models G_1 \iff J \models G_1$ und $I \models G_2 \iff J \models G_2$.

Dann

$$\begin{array}{l}
 \text{Defn.} \\
 \text{von } \models \\
 \text{für } \wedge
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \iff I \models F \\
 \iff I \models G_1 \wedge G_2 \\
 \iff \underbrace{I \models G_1}_{\Downarrow (*)} \text{ und } \underbrace{I \models G_2}_{\Downarrow (*)}
 \end{array}
 \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Defn.} \\
 \text{von } \models \\
 \text{für } \wedge
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \iff \underbrace{J \models G_1}_{\Downarrow (*)} \text{ und } \underbrace{J \models G_2}_{\Downarrow (*)} \\
 \iff J \models G_1 \wedge G_2 \\
 \iff J \models F
 \end{array}
 \right\}$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) Sei $F = G_1 \vee G_2$, wobei $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1), \Phi(G_2)$ gelten.

Ξ : $\Phi(F)$ gilt.

[\rightsquigarrow Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.



(5) Sei $F = \exists x A$, wobei x eine Var und $A \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(A)$ gilt.

\exists : $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp mit $\Psi(F, I, J)$.

(*) Da $F = \exists x A$, haben wir $\text{Sym}(F) = \text{Sym}(A) \setminus \{x\}$.
 Daraus folgt $\text{Sym}(A) \subseteq \text{Sym}(F) \cup \{x\}$. (warum?)

Für $u \in \mathcal{U}$ gelten:

(Δ) $s \in \text{Sym}(F) \Rightarrow s \neq x$, also $s \stackrel{I[x \mapsto u]}{=} s \stackrel{I}{=} s \stackrel{J}{=} s \stackrel{J[x \mapsto u]}{=} s$ weil $\Psi(F, I, J)$
 $s = x \Rightarrow s \stackrel{I[x \mapsto u]}{=} u = s \stackrel{J[x \mapsto u]}{=} s$ weil $s \neq x$ weil $s \neq x$

(*) Da $\text{Sym}(A) \subseteq \text{Sym}(F) \cup \{x\}$, folgt aus (Δ) dass $\Psi(A, I[x \mapsto u], J[x \mapsto u])$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Per Ind., da $\Phi(A)$ gilt, erhalten wir daraus, dass

(***) $I[x \mapsto u] \models A \iff J[x \mapsto u] \models A$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Dann

$$\begin{aligned} & I \models F \\ \text{Def. von } \models \text{ für } \exists & \iff I \models \exists x A \\ & \iff \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } \underbrace{I[x \mapsto u] \models A}_{\iff (***)} \\ & \iff \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } \underbrace{J[x \mapsto u] \models A}_{\iff (***)} \\ \text{Def. von } \models \text{ für } \exists & \iff J \models \exists x A \\ & \iff J \models F \end{aligned}$$

Also gilt $\Phi(F)$, d.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) Sei $F = \forall x A$, wobei x eine Var und $A \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(A)$ gilt.

\forall : $\Phi(F)$ gilt.

[→ übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$. →

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1)-(6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen, $(U, \cdot^I), (U, \cdot^J)$, falls $s^I = s^J$ für alle $s \in \text{Sym}(F)$, } $\mathcal{I}(F)$
dann $I \models F$ gdw. $J \models F$.



(Beweisende)

Dies ist nur eine Vorlage. Die wesentliche Arbeit bleibt zu lösen.

Hinweis zu HA 4.5(a)

Beh. Seien $(U, \cdot^I), (U, \cdot^J)$ Interpretationen und $F \in \mathcal{T}$ eine Fml. angenommen, $s^I = s^J$ für alle $s \in \text{Sym}(F)$.
Dann für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ mit $\text{Sym}(t) \subseteq \text{Sym}(F)$ gilt $t^I = t^J$.

Bew. Sei $\mathcal{T}(t) := \{\tilde{t} \in \mathcal{T} \mid \tilde{t} \text{ in } t \text{ enthalten od. } \tilde{t} = t\}$.
Wir zeigen per str. Ind. über die Teilausdrucksbeziehung, dass
$$\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$$

für alle $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$.

Sei $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$ beliebig. Angenommen $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$
für alle Teilausdrücke von \tilde{t} . *Dies ist die IV*

Fall 1 $\tilde{t} = x$, x eine Variable.

Frage: Ist $x \in \text{Sym}(F)$?
Wie zeigt man dies?
Wie nütze man die Eigenschaften von I, J aus, um zu zeigen, dass $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$?

Fall 2 $\tilde{t} = c$, c eine Konstante

Hinweis: wie beim 1. Fall.

Fall 3 $\tilde{t} = f(\tilde{t}'_1, \tilde{t}'_2, \dots, \tilde{t}'_n)$ mit f Fktsymbol (n-stellig) und $\tilde{t}'_1, \tilde{t}'_2, \dots, \tilde{t}'_n \in \mathcal{T}(t)$ und $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$.

Frage: Was kann man über $\tilde{t}'_i{}^I$ und $\tilde{t}'_i{}^J$ sagen?
Wie begründet man dies?

Frage: Ist $f \in \text{Sym}(F)$? Wie zeigt man dies?
Wie nützt man die Eigenschaften von I, J aus, um zu zeigen, dass $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$?

Per str. Ind. gilt $\tilde{t}^I = \tilde{t}^J$ für alle $\tilde{t} \in \mathcal{T}(t)$.

Insbesondere gilt dies für t . Darum gilt die Behauptung. □

(Variante, die zu Seiten 6-9 aus diesem Dokument passen.)

Hinweis zu HA 4.5(a)

Dies entspricht der Aussage in 4.5(a).
(Warum?)

Beh. Für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ gilt $\Phi(t)$.

Bew. Sei $\mathcal{E} := \{t \in \mathcal{T} \mid \Phi(t)\}$. Wir zeigen per str. Ind, dass $\mathcal{E} = \mathcal{T}$.

(1) Sei t eine Variable od. Konstante,
 \mathbb{Z} : $\Phi(t)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(I, J, t)$.

D.h. $s^I = s^J$ für alle $s \in \text{Sym}(t)$.

Anhand dieser Infos geige jetzt, dass
Hinweis: $t^I = t^J$
wie sieht $\text{Sym}(t)$ aus?

Darum gilt $\Phi(t)$, d.h. $t \in \mathcal{E}$.

(2) Sei $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$, f n -stelliges Fktsymbol,
und $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{E}$.

\mathbb{Z} : $\Phi(t)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(t, I, J)$.

D.h. $s^I = s^J$ für alle $s \in \text{Sym}(t)$.

Da \square , gilt $\Psi(t_i, I, J)$ für alle i .

Per Ind gilt also \square für alle i .

Da $f \in \text{Sym}(t)$, gilt auch \square .

Aus \heartsuit + $\heartsuit\heartsuit$ folgt

$$t^I = (f(t_1, \dots, t_n))^I = \square = \square = \square = t^J.$$

Darum gilt $\Phi(t)$, d.h. $t \in \mathcal{E}$.

Aus (1) + (2) folgt per \square , dass $\mathcal{E} = \mathcal{T}$.

D.h. für alle Terme t , und alle Interp I, J mit \square

gilt \square .



$$\left(f(t_1, t_2, \dots, t_n) \right)^I$$

$$= f^? \left(? \quad ? \quad , \dots , ? \right)$$

$$\parallel \quad \cdot$$

$$\parallel \parallel \left(f(t_1, t_2, \dots, t_n) \right)^J$$