Seminaraufgaben Ser 3

2. Juni 2021
(Woche 8)

Sem 3.1

a) $F_0 = \neg(((A_0 \to A_1) \to A_0) \to A_0)$.

$$F_0 \equiv ((A_0 \to A_1) \to A_0) \land \neg A_0 .$$

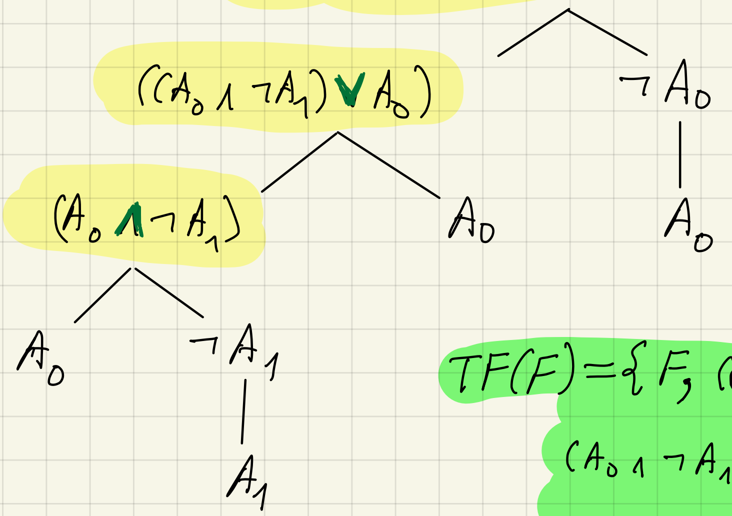
$$\equiv (\neg(A_0 \to A_1) \lor A_0) \land \neg A_0 .$$

$$\equiv ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0) \land \neg A_0 . \quad \} \leftarrow NNF$$

$$=: F$$

b)

$$F = ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0) \land \neg A_0$$



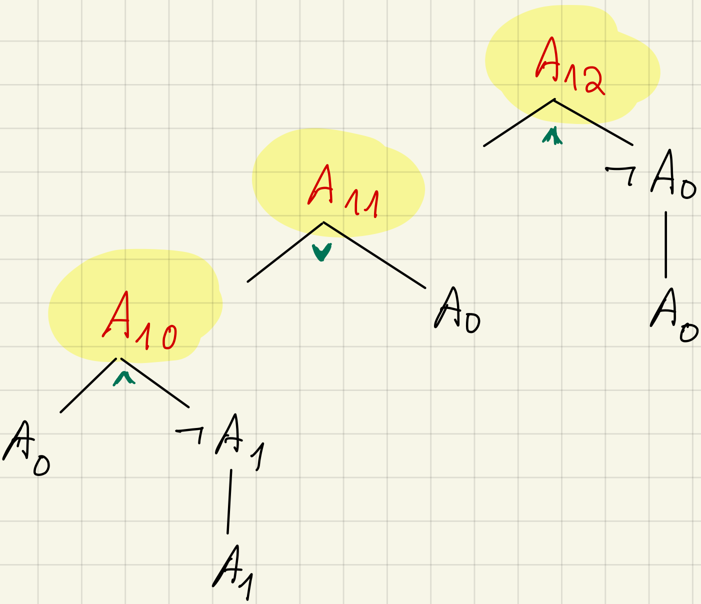
$$TF(F) = \{ F, ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0), (A_0 \land \neg A_1), \neg A_1, \neg A_0, A_1, A_0 \}$$

$$TF(F) = \{ F, ((A_0 \wedge \neg A_1) \vee A_0), (A_0 \wedge \neg A_1), \neg A_1, \neg A_0, A_1, A_0 \}$$

c) + d)

Teilfml F'	$v(F')$	$t_v(F')$
A_0	A_0	—
A_1	A_1	—
$\neg A_0$	$\neg A_0$	—
$\neg A_1$	$\neg A_1$	—
$(A_0 \wedge \neg A_1)$	A_{10}	$A_{10} \leftrightarrow (A_0 \wedge \neg A_1)$
$((A_0 \wedge \neg A_1) \vee A_0)$	A_{11}	$A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee A_0)$
F	A_{12}	$A_{12} \leftrightarrow (A_{11} \wedge \neg A_0)$

c) d)



e)

Teilfml F'	$v(F')$	$t_v(F')$
A_0	A_0	—
A_1	A_1	—
$\neg A_0$	$\neg A_0$	—
$\neg A_1$	$\neg A_1$	—
$(A_0 \land \neg A_1)$	A_{10}	$A_{10} \leftrightarrow (A_0 \land \neg A_1)$
$((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0)$	A_{11}	$A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \lor A_0)$
F	A_{12}	$A_{12} \leftrightarrow (A_{11} \land \neg A_0)$

$$tsei_v(F) = v(F) \land \bigwedge_{F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}} t_v(F')$$

$$= A_{12} \land (A_{10} \leftrightarrow (A_0 \land \neg A_1))$$
$$\land (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \lor A_0))$$
$$\land (A_{12} \leftrightarrow (A_{11} \land \neg A_0))$$

f) $tsei_v(F) \equiv A_{12}$

$$\land (\neg A_{10} \lor A_0) \land (\neg A_{10} \lor \neg A_1) \land (A_{10} \lor \neg A_0 \lor A_1)$$
$$\land (\neg A_{11} \lor A_{10} \lor A_0) \land (A_{11} \lor \neg A_{10}) \land (A_{11} \lor \neg A_0)$$
$$\land (\neg A_{12} \lor A_{11}) \land (\neg A_{12} \lor \neg A_0) \land (A_{12} \lor \neg A_{11} \lor A_0)$$

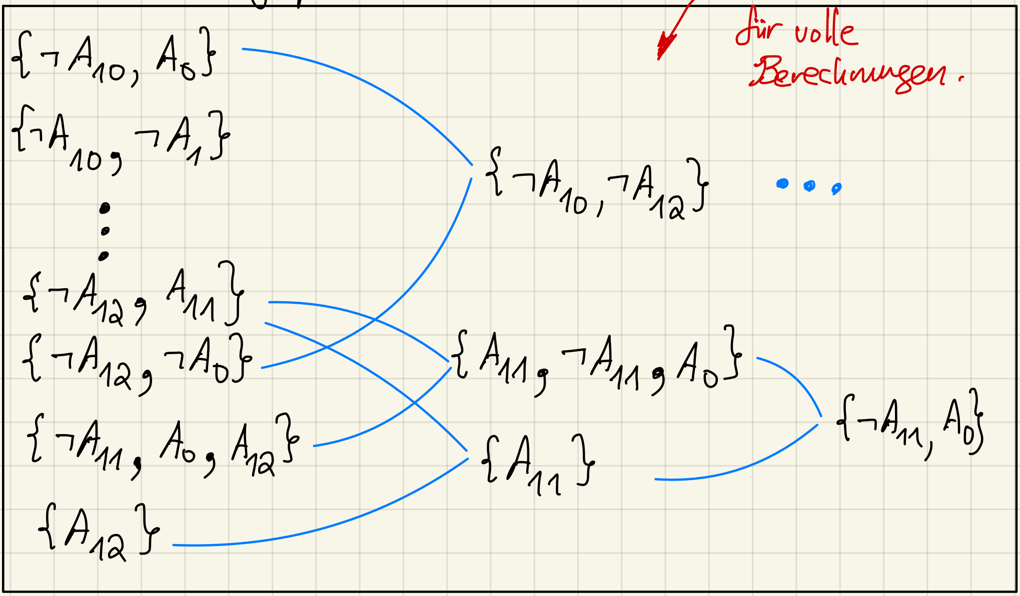
Sem 3.2

Disjunktionsglieder

a) $G \equiv \{\{\neg A_{10}, A_0\}, \{\neg A_{10}, \neg A_1\}, \dots, \{A_{12}\}\}_\wedge$

(bitte wenden für volle Berechnungen.

b) Resolventengraph (IDEE)



*wir müssen nicht alle Resolventen bilden, wenn wir lediglich zeigen wollen, dass $\emptyset \in Res^*(G)$

c) Aus Graphen folgt $\emptyset \in Res^*(G)$.

$\xRightarrow{\text{Korrektheit}}$ G unerfüllbar $\Rightarrow$ $\exists$ Deduktion

(bitte wenden für Deduktion)

d) G unerf. $\Rightarrow \neg G$ tautolgisch

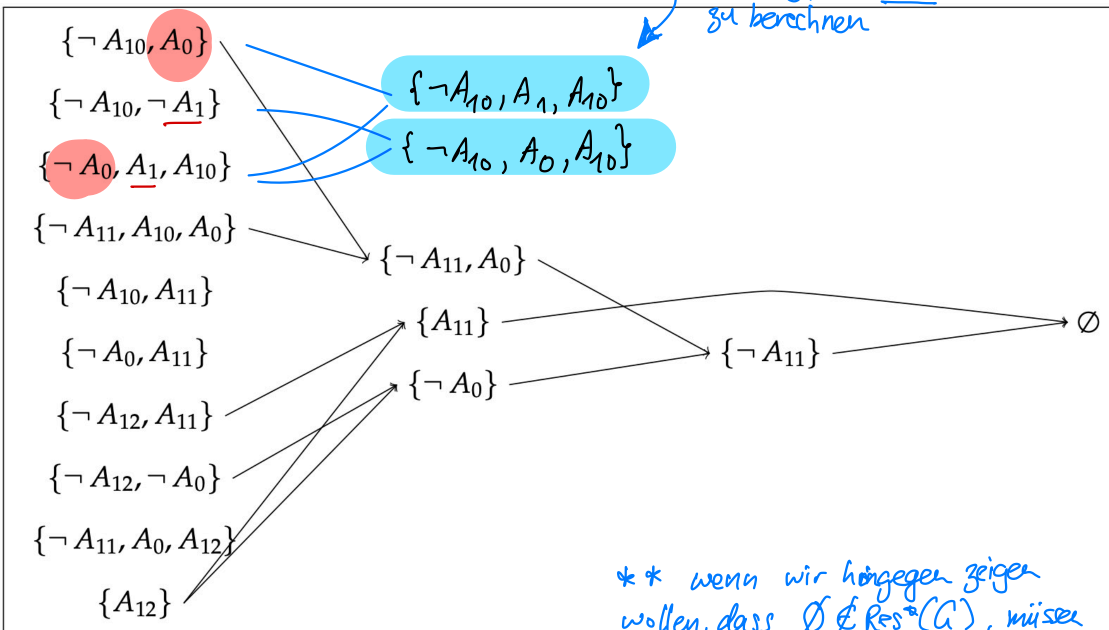
$\Rightarrow \neg G$ insbesondere erfüllbar //

KLAUSELFORM:

$$G = \{\{\neg A_{10}, A_0\}, \{\neg A_{10}, \neg A_1\}, \{\neg A_0, A_1, A_{10}\}, \{\neg A_{11}, A_{10}, A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{\neg A_0, A_{11}\}, \{\neg A_{12}, A_{11}\}, \{\neg A_{12}, \neg A_0\}, \{\neg A_{11}, A_0, A_{12}\}, \{A_{12}\}\}_{\wedge}.$$

RESOLVENTENGRAPH:

* da wir ∅ ableiten, brauchen wir nicht alle Resolventen zu berechnen



** wenn wir hingegen zeigen wollen, dass $\emptyset \notin \mathrm{Res}^*(G)$, müssen wir alle Resolventen berechnen.

DEDUKTION:

1. $\{A_{12}\}$ Klausel aus G.
2. $\{\neg A_{12}, \neg A_0\}$ Klausel aus G.
3. $\{\neg A_{10}, A_0\}$ Klausel aus G.
4. $\{\neg A_{11}, A_{10}, A_0\}$ Klausel aus G.
5. $\{\neg A_{12}, A_{11}\}$ Klausel aus G.
6. $\{\neg A_{11}, A_0\}$ Res. aus 4 + 3 unter A_{10}.
7. $\{A_{11}\}$ Res. aus 1 + 5 unter A_{12}.
8. $\{\neg A_0\}$ Res. aus 1 + 2 unter A_{12}.
9. $\{\neg A_{11}\}$ Res. aus 6 + 8 unter A_0.
10. $\emptyset$ Res. aus 7 + 9 unter A_{11}.

URTEIL: Da $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(G)$, ist G unerfüllbar.

Sem 3.3

a) **Wahr:** PTIME vs. EXPTIME.

(TT) über PTIME, (WWT) über EXPTIME

Sei F eine Formel. Sei $m = |TF(F)|$, $n = |Atome(F)|$.

Wir wissen
$$n \leq m \leq \text{Länge}(F)$$
und im 'worst case' sind diese bis auf konstantes Vielfach ähnliche Größen.

Tseitin:

NNF Umwandlung	:	kostet Konst $\cdot\, m$ Zeit
TF(F) berechnen	:	" " " "
ν bauen	:	" " " "
t_ν bauen	:	" " " "
$tsei_\nu$ bauen	:	" " " "
KNF daraus bauen	:	" " " "

insgesamt: TT läuft in $\underline{O(m)}$ Zeit.

WWT:

$\underbrace{\text{Atome}(F)}$	$\underbrace{TF(F)\setminus \text{Atome}(F)}$				F
00 0					1
00 1					0
					0
					1
⋮					⋮
					0
11 1					1

2^n Schritte

$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$ Konst $\cdot\, m$ Berechnungen

D-Glieder bilden

je Glied kostet Konst $\cdot\, n$ Schritte.

WWT läuft in $O(2^n(m+n))$ Zeit

$\underset{\text{da } n \leq m}{\leadsto}$ $O(2^n m)$ Zeit

$\underset{\text{worst case } \frac{n}{m} \to 1}{\leadsto}$ $\Omega(2^m m)$ ... also $\underline{O(2^m)\text{ Zeit}}$

($2^m m \sim 2^m$ asymptotisch)

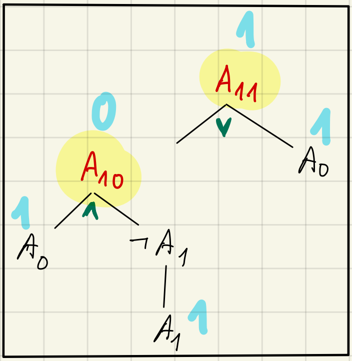
b) **Wahr**: Hier ein Bsp. für $F=(A_0\wedge\neg A_1)\vee A_0$.

Modell $tsei_v(F) \rightsquigarrow$ Modell F:

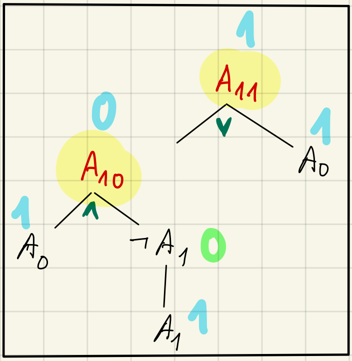
Sei I Modell für $tsei_v(F)$

$$tsei_v(F) = A_{11}\wedge(A_{11}\leftrightarrow(A_{10}\vee A_0))\wedge(A_{10}\leftrightarrow(A_0\vee\neg A_1))$$

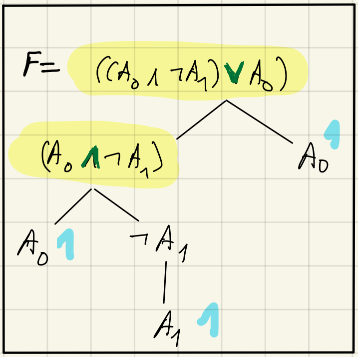
Beispiel mit $I=\{A_0, A_1, A_{11}\}$



berechne eval von allen Kindern

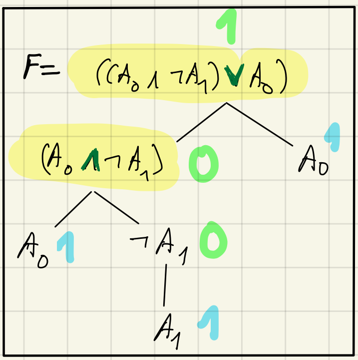


arbeite weiter mit I



Betrachte Situation mit F und seinen Teilfml.

Wende Algorithmus für eval(·,·) auf Teilfml an:



- zeige per str. Induktion, dass $eval(F', I) = eval(v(F'), I)$ für alle Teilfml F' von F.
- Insbesondere gilt $eval(F, I) = eval(v(F), I) = 1$

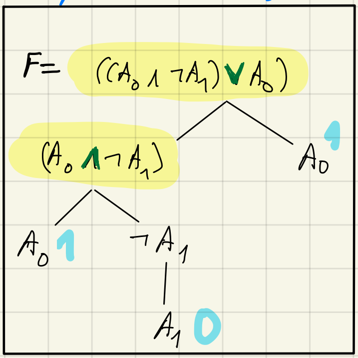
Also $I \models F$

3.3 b) fortgesetzt...)

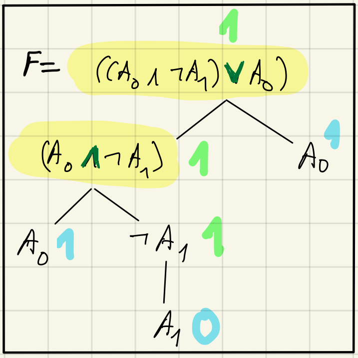
Modell F ⇝ Modell $tsei_v(F)$

Sei I Modell für F, d.h. $eval(F, I) = 1$.

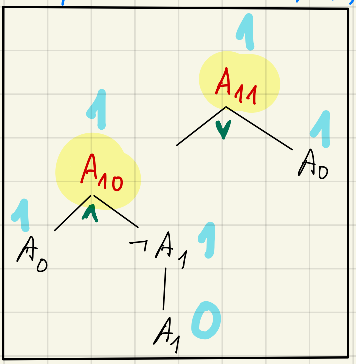
Beispiel mit $I = \{A_0\}$



berechne eval von allen Teilformeln von F:



Beispiel $I ⇝ \tilde{I} = \{A_0, A_{10}, A_{11}\}$



- Konstruiere
  $\tilde{I} := \{v(F') \mid F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L},\ I \models F'\}$
  $\cup \{A \in TF(F) \cap \mathcal{A} \mid I \models A\}$.
  Dann einfach zu sehen:
  $eval(v(F'), \tilde{I}) = eval(F', I) \quad \forall F' \in TF(F)$ $\}$ $*$
- Insbesondere $v(F) \in \tilde{I}$,
  weil $eval(F, I) = 1$ per Wahl. $\}$ $**$

Sei $F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}$. Dann

<u>Fall 1</u> $F' = F_1' \wedge F_2'$ wobei $F_1', F_2' \in TF(F)$.

Dann $eval(v(F'), \tilde{I}) \overset{*}{=} eval(F', I)$
$= eval(F_1' \wedge F_2', I)$
$\overset{*}{=} eval(v(F_1') \wedge v(F_2'), \tilde{I})$

Darum $eval(v(F') \leftrightarrow (v(F_1') \wedge v(F_2')), \tilde{I}) = 1$

d.h. $eval(t_v(F'), \tilde{I}) = 1$

<u>Fall 2</u> $F' = F_1' \vee F_2'$ wobei $F_1', F_2' \in TF(F)$.
(analog)

$***$ also $\tilde{I} \models t_v(F')$ für alle $F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}$

Aus $**$ + $***$ folgt $\tilde{I} \models v(F) \wedge \bigwedge_{F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}} t_v(F')$, d.h. $\tilde{I} \models tsei_v(F)$.

c) **Falsch:**

$F = \{\{\neg A_3, A_5\}, \{A_5\}, \{\neg A_3\}\}_\wedge$.

$Res^*(F) = \{\{\neg A_3, A_5\}, \{A_5\}, \{\neg A_3\}\}$.

Also $\emptyset \notin Res^*(F)$.

Darum F nich erfüllbar und hat **keine** Deduktion.

d) **Wahr:** Laut VL gilt

$Res^n(F) \equiv F$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

insbes. auch für $n = 17$.