# Seminaraufgaben Ser5

30. Juni 2021
(Woche 12)

## Sem 5.1

(a) $g(j(x,x), y, x)\ [x \mapsto h(z)]$

$= g(j(x,x)[x \mapsto h(z)], y[\dots], x[\dots])$

$= g(j(x[\dots], x[\dots]), y[\dots], x[\dots])$

$= g(j(h(z), h(z)), y, h(z))$

(b) $(\forall z\, P(z) \wedge \forall x\, \exists y\, R(x,y,z))\ [z \mapsto k(x, c_1)]$

$= \underbrace{\forall z\, P(z)\ [z \mapsto \dots]} \wedge \underbrace{\forall x\, \exists y\, R(x,y,z)\ [z \mapsto k(x, c_1)]}$

$= \forall z\, P(z)$

$= \forall x_1\, \exists y\, R(x_1, y, z)\ [\dots]$

$= \forall x_1\, (\exists y\, R(x_1, y, z)\ [\dots])$

$= \forall x_1\, \exists y\, (R(x_1, y, z)\ [\dots])$

$= \forall x_1\, \exists y\, R(x_1, y, k(x, c_1))$

$= \forall z\, P(z) \wedge \forall x_1\, \exists y\, R(x_1, y, k(x, c_1))$

# Sem 5.2

$F = P(f(x,z))$

Anmerkungen

$P$ 1-stellig Reln

$f$ 2-stellig Fkt.

$y \notin FV(F)$

Sei $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{I}})$ fixe Interp.

**Z:** $\mathcal{I} \models \forall y\, (F[x \mapsto y])$ gdw. $\mathcal{I} \models \forall x\, F$

NEBENRECHNUNG

$F[x,y] = P(f(x,z))\,[x \mapsto y]$

$= P(f(y,z))$

$\mathcal{I} \models \forall y\, (F[x \mapsto y])$

gdw. $\mathcal{I} \models \forall y\, P(f(y,z))$

gdw. für alle $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}_{[y \mapsto u]} \models P(f(y,z))$

gdw. für alle $u \in \mathcal{U}$: $(f(y,z))^{\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}} \in P^{\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}}$

gdw. für alle $u \in \mathcal{U}$: $f^{\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}}(y^{\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}}, z^{\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}}) \in P^{\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}}$

weil $f, z, P$ von $\mathcal{I}_{[y\mapsto u]}$ und $\mathcal{I}$ gleich interpretiert werden.

(*)

kritischer Übergang

analog zu (*)

gdw. für alle $u \in \mathcal{U}$: $f^{\mathcal{I}}(u, z^{\mathcal{I}}) \in P^{\mathcal{I}}$

gdw. für alle $u \in \mathcal{U}$: $(f(x,z))^{\mathcal{I}_{[x\mapsto u]}} \in P^{\mathcal{I}_{[x\mapsto u]}}$

gdw. für alle $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models P(f(x,z))$

gdw. $\mathcal{I} \models \forall x\, P(f(x,z))$

gdw. $\mathcal{I} \models \forall x\, F$ // Also gilt die Aussage.

# Sem 5.3

$$F = \neg \exists x_0 \exists x_1 \left( \forall z\, P(f(x_0, x_1, z)) \wedge \forall x_0 (Q(y) \to T(x_0)) \right)$$

(a) NNF erstellen   ( $\neg$ reinscheiben, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\exists \leftrightarrow \forall$ )

$$F \equiv \forall x_0 \forall x_1 \neg ( \dots \wedge \dots )$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 ( \neg \forall z \dots \vee \neg \forall x_0 \dots )$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \big( \exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_0 \neg ( \dots \to \dots ) \big)$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \big( \exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_0 (Q(y) \wedge \neg T(x_0)) \big)$$

**NNF**

(b) Bereinigung

$$F \equiv \forall x_0 \forall x_1 \big( \exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_2 (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \big)$$

**ist bereinigt.**

Binden:

$$F \text{ erf. äqv zu } \overbrace{\exists y\, \forall x_0 \forall x_1 \big( \exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_2 (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \big)}^{F_2}$$

(c)

$$F_2 = \exists y \forall x_0 \forall x_1 \big( \exists z \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee \exists x_2 (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \big)$$

$$\equiv \exists y \forall x_0 \forall x_1 \exists z \exists x_2 \big( \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \big)$$

PNF

(d) $F_2 \equiv \exists y \forall x_0 \forall x_1 \exists z \exists x_2 \big( \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee (Q(y) \wedge \neg T(x_2)) \big)$

erf. äquivalent zu

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \exists z \exists x_2 \big( \neg P(f(x_0, x_1, z)) \vee (Q(c') \wedge \neg T(x_2)) \big)$$

$c'$ neue Konst.

$$\forall x_0 \forall x_1 \big( \neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0,x_1))) \vee (Q(c') \wedge \neg T(g''(x_0,x_1))) \big)$$

$g', g''$ neue Fkt.symbol.

Skolemisierung vo $F_2$

$(=: F_3)$

(e) F erf. äqv. zu $F_3$

$$F_3 = \forall x_0 \forall x_1 \Big( \neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0,x_1))) \vee (Q(c') \wedge \neg T(g''(x_0,x_1))) \Big)$$

$$\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$$

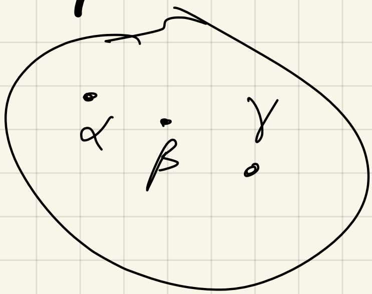
$$\equiv (\neg A_0 \vee A_1) \vee (\neg A_0 \vee \neg A_2)$$

$$\equiv \forall x_0 \forall x_1 \Big( (\neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0,x_1))) \vee Q(c')) \wedge (\neg P(f(x_0, x_1, g'(x_0,x_1))) \vee \neg T(g''(x_0,x_1))) \Big)$$

// KNF.

# Sem 5.4

(a) $U =$




$$E^{I} = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}$$

$$g'^{I} : U \longrightarrow U$$

$$: \alpha \longmapsto \beta$$

$$: \beta \longmapsto \gamma$$

$$: \gamma \longmapsto \alpha$$

(b) Sei $u \in U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Fall 1. $u = \alpha$.

Sei $v = g'^{\mathcal{I}}(u) = \beta$.

Dann $(u, v) \in E^{\mathcal{I}}$ und $(v, u) \notin E^{\mathcal{I}}$

Also $\mathcal{I}_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also für ein $v \in U$ gilt

$\mathcal{I}_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models \exists y \, (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

Fall 2. $u = \beta$.

Sei $v = g'^{\mathcal{I}}(u) = \gamma$

Dann $(u, v) \in E^{\mathcal{I}}$ und $(v, u) \notin E^{\mathcal{I}}$

Also $\mathcal{I}_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also für ein $v \in U$ gilt

$\mathcal{I}_{[x \mapsto u][y \mapsto v]} \models E(x, y) \wedge \neg E(y, x)$

Also $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models \exists y \, (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

Fall 3. $u = \gamma$. Analog zu Fall 2.

$\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models \exists y \, (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

Also für alle $u \in U$: $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models \exists y \, (E(x, y) \wedge \neg E(y, x))$

$\Rightarrow \mathcal{I} \models \forall x \exists y \, ( \cdots\cdots )$ d.h. $\mathcal{I} \models F$ //

(c) **Ja.** Die Interpretation der Skolemfkt liefert uns Zeugen für die $\exists$-quantifizierten Teilfml. (Siehe Bearbeitung von (b).)

(d) **Nein.** Man kann die Interp der Skolemfkt so wählen, dass die Werte auf „Nichtzeugen" von $\exists$-quantifizierten Teilfml abgebildet werden. Z.B. wenn man oben $g'(\alpha) = \alpha$ o.d. $g'(\beta) = \gamma$ und $g'(\gamma) = \beta$ wählt, gilt $I \models F$ weiterhin, aber $I \not\models F^{skol}$.

**Bem.** I. A. wissen wir nur, dass $F, F^{skol}$ erf. äqv. sind, aber wir müssen dennoch im Einzelfall prüfen, ob $F \not\equiv F^{skol}$ wirklich so ist.