Seminarauf. | Serie 2

12. Mai 2021

Sem 2.1

✓a) Es gilt $I \models \emptyset \overset{\text{Def}^n}{\iff}$ für alle F in $\emptyset$ gilt $\underbrace{I \models F}$

wahr, weil über leerer Menge quantifiziert wird

(analog $\bigwedge_{\text{leer}} \equiv \top$; $\bigvee_{\text{leer}} \equiv \bot$)

ABER: dies sagt uns gar nicht über $\bigwedge_{\mathcal{F}}$ bzw. $\bigvee_{\mathcal{F}}$.

Darum ist wahr.

X b) I erf. $\{A_{278}, \neg A_{278}\}$ nicht, weil eval($\neg A$, I) $= 0$.

Darum ist Aussage in Aufgabe falsch.

✓c) $I \models A_{278} \vee \neg A_{278}$:

es gilt $\text{eval}(A_{278} \vee \neg A_{278}, I)$

$= \max\{\text{eval}(A_{278}, I),$
$1 - \text{eval}(A_{278}, I)\}$

$= \max\{0, 1\} = 1.$

$\Rightarrow$ I erf. Formel

$\Rightarrow$ Aussage ist wahr.

✓d) $I \models \overbrace{\{\neg H \mid H \in \mathcal{F},\ H \text{ nicht erf.}\}}^{\Gamma :=}$:

Sei $H \in \mathcal{F}$. Dann H nicht erf.
$\Rightarrow \neg H$ tautolgisch
$\Rightarrow$ alle Modelle erf. $\neg H$
$\Rightarrow$ insbesondere: I erf. $\neg H$.

I erf. alles in der Menge Γ.

Darum $I \models \Gamma$, d.h. die Aussage stimmt.

✓e) $I \models \overbrace{\{\neg A_1,\ \neg A_1 \to (A_0 \to A_{10})\}}^{\Sigma}$.

- $\neg A_1$: $I \models \neg A_1$, weil $I \not\models A_1$,
  weil $A_1 \notin I$.

- $\neg A_1 \to (A_0 \to A_{10})$:
  - $I \models A_0 \to A_{10}$,
    weil $(I \models A_0 \Rightarrow I \models A_{10})$
    weil $I \not\models A_0$.
  - Da $I \models \neg A_1$ und $I \models A_0 \to A_{10}$,
    gilt $I \models \neg A_1 \to (A_0 \to A_{10})$

daraus folgt $I \models \Sigma$.

Also ist die Aussage wahr.

Sem 2.2

	Sprachlich	Mathe	bspw. Java
	dasselbe / identisch	$=$	`===`
	das Gleiche / äquiv.	$\equiv$	`==`

a) DNF **IDEE**: alle 1er-Zeilen $\rightsquigarrow$ pos Lit $\rightsquigarrow A$
neg Lit $\rightsquigarrow \neg A$

$$H \equiv (\neg A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3) \lor (\neg A_1 \land \neg A_2 \land A_3)$$
$$\lor (\neg A_1 \land A_2 \land \neg A_3) \lor (A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3)$$
$$\lor (A_1 \land \neg A_2 \land A_3).$$

b) KNF **IDEE**: alle 0er-Zeilen $\rightsquigarrow$ pos Lit $\rightsquigarrow \neg A$
neg Lit $\rightsquigarrow A$

$$H \equiv (A_1 \lor \neg A_2 \lor \neg A_3) \land (\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor A_3)$$
$$\land (\neg A_1 \lor \neg A_2 \lor \neg A_3)$$

Sem 2.3

a) ✓ $((A_1 \land A_5) \to A_3) \land (A_2 \to A_4)$

b) ✗ keine Hornfml, weil $\boxed{>1 \text{ pos. Lit}}$ im zweiten Disjunktionsglied

c) ✓ $(A_1 \to \bot) \land (\top \to A_2)$

d) ✓ $((A_3 \land A_4 \land A_5 \land A_{10}) \to \bot)$

e) ✓ $((A_3 \land A_5 \land A_{10}) \to A_4)$

f) ✓ $(A_5 \to \bot) \land (A_8 \to \bot) \land (A_{13} \to \bot)$

Sem 2.4: Ausführung wie in der ÜG (siehe Aufzeichnung):

F							
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\perp$
0		•	•				
1		•	•		•		
2		•	•		•	•	
4	— terminiert —						
5							
6							
7							

G						
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\perp$
0	•					
1	•			•		
2	•			•	•	
3	•		•	•	•	
4	•		•	•	•	•
6	— terminiert —					

Wenn man diese „schnellere" Variante anwendet, sähen die Entwicklungen der Markierungen so aus:

F							
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\perp$
0		•	•				
1		•	•		•	•	
3	— terminiert —						
4							
5							
6							
7							

G						
Schritt	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	$\perp$
0	•					
1	•			•	•	
2	•		•	•	•	•
4	— terminiert —					
5						
6						

Deutung der Markierungen:

Für F: Da $\perp$ nicht markiert, **erfüllbar** laut Thm §30. Aus dem Endzustand geht $I = \{A_1, A_2, A_4, A_5\}$ als eine Interpretation für F hervor.

Für G: Da $\perp$ markiert, **nicht erfüllbar** laut Thm §30.

Sem 2.5

Beh. $d(F) < w(F)$ für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$.

Beweis Es reicht per **str. Ind.** zu zeigen dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, wobei
$\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid d(F) < w(F)\}$. Dies machen wir wie folgt.

i) **Z:** $A_i \in \mathcal{E}$ für alle Atome A_i:

Es gilt $\left. d(A_i) \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} 0 < 1 \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} w(A_i) \right\} \Rightarrow$ per Konstruktion liegt A_i in $\mathcal{E}$.

ii) Sei $F \in \mathcal{E}$, d.h. $d(F) < w(F)$.

Z: $\neg F \in \mathcal{E}$.

Es gilt $d(\neg F) \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} \underbrace{d(F)}_{<w(F)} + 1 < w(F) + 1 \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} w(\neg F)$

Wegen Monotonie von Addition

$\Rightarrow \neg F \in \mathcal{E}$.

iii) Seien $G, H \in \mathcal{E}$, d.h. $d(G) < w(G)$ und $d(H) < w(H)$.

Z: $(G \wedge H) \in \mathcal{E}$.

Es gilt
$$d((G \wedge H)) \overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} \max\{\underbrace{d(G)}_{<w(G)}, \underbrace{d(H)}_{<w(H)}\} + 1$$
$$< \max\{w(G), w(H)\} + 1$$
$$\leq w(G) + w(H) + 1$$
$$\overset{\text{Def}^{\text{n}}}{=} w((G \wedge H))$$

können mathematisch begründet werden. Aber es reicht, solche basic Manipulationen einfach so zu benutzen.

$\Rightarrow d((G \wedge H)) < w((G \wedge H))$

$\Rightarrow (G \wedge H) \in \mathcal{E}$

iv) Seien $G, H \in \mathcal{E}$.

Z: $(G \vee H) \in \mathcal{E}$.

ACHTUNG dies gilt zwar in dieser Aufgabe aber nicht i. A.
Soetwas mit Vorsicht machen!!

Da nun $d(\cdot)$ bzw. $w(\cdot)$ für den $\vee$-Fall genauso definiert werden wie für den $\wedge$-Fall, ist das Argument hier analog zu dem für **iii)**.

Aus **i)–iv)** folgt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Insbesondere gilt $d(F) < w(F)$ für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$. $\square$