Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$F = \neg\left(A\left(f(x_2, x_2)\right) \wedge B(b)\right) \rightarrow \exists x_2\, P(x_1, c, x_2)$$

frei   frei   geb.

$FV(F) = \{x_1, x_2\}$ „freie Variablen"

$GV(F) = \{x_2\}$ „gebundene Variablen"

Relⁿ		Fkt		Konst
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

Nebendiskussion

$$\{\emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$$

$$\forall x.\ \left(\left(\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)\right) \wedge P(\mathbb{1})\right)$$

Sem 4.2

(a) $\neg \exists x \exists y \; \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

oder: $\forall x \neg \exists y \; \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$\Phi(x) :\equiv \neg \exists y \left(\text{Teilt}^{(2)}(y, x) \wedge \text{GrößerAls}^{(2)}(\text{MinusDrei}^{(1)}(x), y) \right)$

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: R /2

Literatur: $\underbrace{\#}(R) = 2$ (od. andere Fktsymbol statt #)

dt. „Stelligkeit"
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c), x)$. Dann $Sym(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $U = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\quad f^I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$: (u, v) \longmapsto u$$

$$c^I := 1000$$

$$x^I := 1$$

② $R^J := \emptyset$, $\quad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c), x)$ und $J \not\models R(f(x,c), x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1, 1000), 1)$
  $= (1, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} = R^I$,
  sodass $I \models R(f(x,c), x)$
- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1, 1000), 1)$
  $= (1, 1) \notin \emptyset = R^J$,
  sodass $J \not\models R(f(x,c), x)$

(b) U = Menge aller Farben $= \{$Rot, Blau, ...$\}$

$R^K = \{$(Rot, Rot), (Blau, Blau), ...$\}$

$f(\text{Farbe}_1, \text{Farbe}_2)$ = Farbe 50% gw. beiden

c^K = Lila

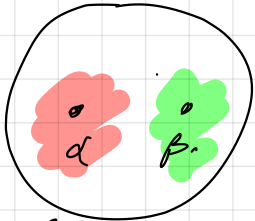
x^K = Lila.

Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila}, \text{Lila}), \text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c), x)$.

Sem 4.4

(a) keine Tautologie



Betrachte die Formeln $F = R(x)$
$G = S(x)$

Betracht Universum + Interp.:
$\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}$, $R^I = \{\alpha\}$, $S^I = \{\beta\}$.

Dann für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt $x^{I_{[x\mapsto u]}} = u \in R^I = R^{I_{[x\mapsto u]}}$
od. $\in S^I = S^{I_{[x\mapsto u]}}$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $I_{[x\mapsto u]} \models R(x)$ od. $I_{[x\mapsto u]} \models S(x)$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $I_{[x\mapsto u]} \models \underbrace{R(x) \vee S(x)}_{F \vee G}$

$\Rightarrow$ $I \models \forall x (F \vee G)$ ✱

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{I_{[x\mapsto u]}} = u \notin S^I = S^{I_{[x\mapsto u]}}$
Also $I_{[x\mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $I_{[x\mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ $I \not\models \underbrace{\forall x\ S(x)}_{\forall x\ G}$ ✱✱

Analog lässt sich argumentieren: $I \not\models \forall x\ F$ ✱✱✱

Aus ✱✱ + ✱✱✱ erhält man
$I \not\models \forall x\ F \vee \forall x\ G$ ✱✱✱✱

Aus ✱ + ✱✱✱✱ folgt also $I \not\models \forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x\ F \vee \forall x\ G)$.

Insbesondere ist $\forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x\ F \vee \forall x\ G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\, (F \to G)$$

$$\equiv \forall x\, (\neg F \vee \underline{G}).$$

$$\equiv (\forall x\, \neg F) \vee G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$

$$\equiv (\neg \exists x\, F) \vee G$$

$$\equiv \exists x\, F \to G.$$

Also ist $\forall x\, (F \to G) \leftrightarrow (\exists x\, F \to G)$ eine Taut.

(c) Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N},\ m < n \}$

$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ $\quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$

In all diesen Interp. kann man zeigen:

$I \models \forall x\, \exists y\, P(x,y)$ aber $I \not\models \exists y\, \forall x\, P(x,y)$

Darum $I \not\models \forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$.

Also ist $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists y\, \forall x\, P(x,y)$ keine Taut.

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(F, I, J) :=$ I, J Interp. (über $\mathcal{U}$) mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$.

Beh. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

$\Phi(F)$ $\begin{cases} \text{Für alle Interp. } I, J \text{ (über } \mathcal{U}) \\ \underline{\text{falls}}\ \Psi(F, I, J),\ \underline{\text{dann}}\ I \models F \text{ gdw. } J \models F. \end{cases}$

Beweis.

Wir zeigen per str. Ind. (über Teilformelbeziehung), dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

Sei $F \in \mathcal{F}$.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

(In (2)–(6) wird vorausgesetzt, dass alle Teilformeln von F in $\mathcal{E}$ liegen.)

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(G) \subseteq Sym(F)$, gilt auch $\Psi(G, I, J)$.
Per Ind haben wir $\Phi(G)$. Da auch $\Psi(G, I, J)$, gilt

(*) $I \models G \iff J \models G.$

Dann $I \models F \iff \underbrace{I \models \neg G \iff I \not\models G}_{\text{Def}^{\text{n}} \text{ von } \models \text{ für } \neg}$

$\Updownarrow$ (*)

$\underbrace{J \not\models G \iff J \models \neg G}_{\text{Def}^{\text{n}} \text{ von } \models \text{ für } \neg} \iff J \models F.$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

→

(3) $F = G_1 \wedge G_2$, also $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(G_1) \subseteq Sym(F)$ und $Sym(G_2) \subseteq Sym(F)$, gelten auch

$$\Psi(G_1, I, J) \text{ und } \Psi(G_2, I, J)$$

Per Ind. haben wir $\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$.

Da auch $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$, gelten

(*) $I \models G_1 \iff J \models G_1$ und $I \models G_2 \iff J \models G_2$.

Dann

$$
\begin{aligned}
& I \models F \\
\text{Def}^{\underline{n}} \text{ von } \models \text{ für } \wedge \quad & \iff I \models G_1 \wedge G_2 \\
& \iff I \models G_1 \text{ und } I \models G_2 \\
& \quad\ \Updownarrow (*) \qquad\qquad \Updownarrow (*) \\
\text{Def}^{\underline{n}} \text{ von } \models \text{ für } \wedge \quad & \iff J \models G_1 \text{ und } J \models G_2 \\
& \iff J \models G_1 \wedge G_2 \\
& \iff J \models F
\end{aligned}
$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$ [$\leadsto$ übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

(5) $F = \exists x\, G$, also $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

(*) Da $Sym(G) \subseteq Sym(F)$, gilt $\Psi(G, I, J)$.

Für jedes $u \in U$ beobachte man, dass

für alle $s \in Sym(G)$

weil s ein Symbol ist und $s \neq x$

$$s = x \Rightarrow s^{I_{[x \mapsto u]}} = u = s^{J_{[x \mapsto u]}}$$

$$s \neq x \Rightarrow s^{I_{[x \mapsto u]}} = s^I \overset{(*)}{=} s^J = s^{J_{[x \mapsto u]}}$$

Darum $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$ für jedes $u \in U$.

Per Ind. haben wir $\Phi(G)$.

Da auch $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$, gilt

(**) $I_{[x \mapsto u]} \models G \iff J_{[x \mapsto u]}\, G$

für jedes $u \in U$

Dann

$$I \models F$$

Def. $\models$ von $\models$ für $\exists$

$$\iff I \models \exists x\, G$$

$$\iff \text{ein } u \in U \text{ existiert mit } \underbrace{I_{[x \mapsto u]} \models G}$$

$$\Updownarrow (**)$$

Def. $\models$ von $\models$ für $\exists$

$$\iff \text{ein } u \in U \text{ existiert mit } \overbrace{J_{[x \mapsto u]} \models G}$$

$$\iff J \models \exists x\, G$$

$$\iff J \models F$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x\, G$ [⤳ **übung!**] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1) – (6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen $(\mathcal{U}, \cdot^I)$, $(\mathcal{U}, \cdot^J)$

<u>falls</u> $\quad s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$,

<u>dann</u> $\quad I \models F$ gdw. $J \models F$

$\square$

(Beweisende)