Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$\neg\big(A(f(x_2, x_2)) \land B(b)\big) \to \exists x_2\, P(x_1, c, x_2)$$

frei

frei

geb.

Rel.		Fkt		Konst.
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

Nebendiskussion

$\{ \emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)} \}$

$$\forall x.\ ((\emptyset = x \lor (\emptyset <^{(2)} x)) \land P(\mathbb{1}))$$

Sem 4.2

(a) $\neg \exists x \exists y \; \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

oder: $\forall x \neg \exists y \; \text{GrößerAls}^{(2)}(x, y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$$\Phi(x) :\equiv \neg \exists y \left(\text{Teilt}^{(2)}(y, x) \wedge \text{GrößerAls}^{(2)}(\text{MinusDrei}^{(1)}(x), y) \right)$$

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: R /2

Literatur: $\underbrace{\#(R)}_{}= 2$ (od. andere Fktsymbol statt #)

dt. „Stelligkeit"
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c),x)$. Dann $Sym(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $U = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\qquad f^I : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad : (u,v) \longmapsto u$

$c^I := 1000$

$x^I := 1$

② $R^J := \emptyset$, $\qquad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c),x)$ und $J \not\models R(f(x,c),x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1,1000), 1)$
  $= (1,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} = R^I$,

  sodass $I \models R(f(x,c),x)$

- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1,1000), 1)$
  $= (1,1) \notin \emptyset = R^J$,

  sodass $J \not\models R(f(x,c),x)$

(b) U = Menge aller Farben = { Rot, Blau, ... }

R^K = { (Rot, Rot), (Blau, Blau), ... }

f (Farbe$_1$, Farbe$_2$) = Farbe 50% gw. beiden

c^K = Lila

x^K = Lila.

Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila}, \text{Lila}), \text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c),x)$.

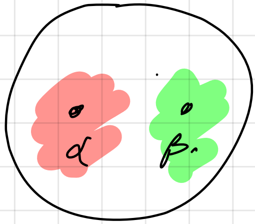
Sem 4.5

(a) keine Tautologie

Sei $\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}$

$R^I = \{\alpha\}$

$S^I = \{\beta\}$.



Sei $F := R(x) \quad G := S(x)$.

Dann

für alle $u \in \mathcal{U}$: $x^{I_{[x \mapsto u]}} = u \in R^{I_{[x \mapsto u]}}$ od. in $S^{I_{[x \mapsto u]}}$

$\Rightarrow \quad I_{[x \mapsto u]} \models R(x)$

oder $\quad I_{[x \mapsto u]} \models S(x)$

$\Rightarrow \quad I_{[x \mapsto u]} \models R(x) \vee S(x)$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $\quad I_{[x \mapsto u]} \models F \vee G$

$\Rightarrow \quad I \models \forall x \, (F \vee G)$ *

für $u = \alpha$: $\quad x^{I_{[x \mapsto u]}} = u = \alpha \notin S^{I_{[x \mapsto u]}}$

d.h. $\quad I_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow \quad I \not\models \forall x \, S(x)$ d.h. $I \not\models \forall x \, G$

analog können wir zeigen: $I \not\models \forall x \, F$

Darum $\quad I \not\models \forall x \, F \vee \forall x \, G$. **

Aus * und ** folgt:

$$I \not\models \forall x(F \vee G) \leftrightarrow (\forall x F \vee \forall x G)$$

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\ (F \rightarrow G)$$

$$\equiv \forall x\ (\neg F \vee \underline{G}).$$

$$\equiv (\forall x\ \neg F) \vee G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$

$$\equiv (\neg \exists x\ F) \vee G$$

$$\equiv \exists x\ F \rightarrow G.$$

Also $\forall x (F \rightarrow G) \leftrightarrow (\exists x F \rightarrow G)$

(c) Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $P^I = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$U = \mathbb{N}$, $P^I = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$

$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $P^I = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\}$

in all diesen Interp. gilt

$I \models \forall x\ \exists y\ P(x, y)$ aber $I \not\models \exists y \forall x\ P(x, y)$

also $I \not\models$ '''' $\rightarrow$ ''''

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(F, I, J) :=$ I, J Interp. mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(F)$.
(über $\mathcal{U}$)

Beh. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

bezeichne dies $\Phi(F)$: Für alle Interp. I, J (über $\mathcal{U}$)

<u>falls</u> $\Psi(F, I, J)$, <u>dann</u> $I \models F$ gdw. $J \models F$.

Beweis.

Wir zeigen per str. Ind. (über Teilformelbeziehung), dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.

Sei $F \in \mathcal{F}$.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

In (2)–(6) nehme man an, alle Teilfml von F liegen in $\mathcal{E}$.

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.

Da $Sym(G) \subseteq Sym(F)$ gilt, auch $\Psi(G, I, J)$. ✱

Per Ind ($\Phi(G)$ gilt) und wegen ✱, erhält man

$I \models G$ gdw. $J \models G$

$\Downarrow$

$I \not\models G$ gdw. $J \not\models G$

$\Downarrow$ Defⁿ von $\models$ für $\neg$

$I \models \neg G$ gdw. $J \models \neg G$

$\Downarrow$

$I \models F$ gdw. $J \models F$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

→

(3) $F = G_1 \wedge G_2$, also $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

(*) Da $Sym(G_1) \subseteq Sym(F)$ und $Sym(G_2) \subseteq Sym(F)$, gelten auch
$\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$

Dann

$$
\begin{aligned}
& I \models F \\
\text{Def}^{\underline{n}} \; & \Leftrightarrow I \models G_1 \wedge G_2 \\
& \Leftrightarrow I \models G_1 \text{ und } I \models G_2 \\
& \qquad \Updownarrow ** \qquad\qquad \Updownarrow *** \\
\text{Def}^{\underline{n}} \; & \Leftrightarrow J \models G_1 \text{ und } J \models G_2 \\
& \Leftrightarrow J \models G_1 \wedge G_2 \\
& \Leftrightarrow J \models F
\end{aligned}
$$

Begründung von ** und ***:
[per Ind
($\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$ gelten)
und wegen (*).

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

→

(5) $F = \exists x\, G$, also $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ Interp. mit $\Psi(F, \mathcal{I}, \mathcal{J})$.

Da $Sym(F) = Sym(G) \cup \{x\}$,
gelten: $\Psi(G, \mathcal{I}, \mathcal{J})^{\dagger}$ und $x^{\mathcal{I}} = x^{\mathcal{J}}$.
Für alle $u \in \mathcal{U}$ beobachte, dass
für alle $s \in Sym(G)$

$$s = x \Rightarrow s^{\mathcal{I}[x \mapsto u]} = u = s^{\mathcal{J}[x \mapsto u]}$$

$$s \neq x \Rightarrow s^{\mathcal{I}[x \mapsto u]} = s^{\mathcal{I}} \overset{(\dagger)}{=} s^{\mathcal{J}} = s^{\mathcal{J}[x \mapsto u]}$$

(**) Darum $\Psi(G, \mathcal{I}_{[x \mapsto u]}, \mathcal{J}_{[x \mapsto u]})$ für alle $u \in \mathcal{U}$.

Dann

$$\mathcal{I} \models F$$

$$\overset{\text{Def}^n}{\iff} \mathcal{I} \models \exists x\, G$$

$$\iff \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } \mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models G$$

$$\Updownarrow$$

Begründung per Ind ($\Phi(G)$ gilt) und wegen (**)

$$\overset{\text{Def}^n}{\iff} \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } \mathcal{J}_{[x \mapsto u]} \models G$$

$$\iff \mathcal{J} \models \exists x\, G$$

$$\iff \mathcal{J} \models G$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x\, G$

[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

→

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1) – (6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{I}})$, $(\mathcal{U}, \cdot^{\mathcal{J}})$

<u>falls</u> $s^{\mathcal{I}} = s^{\mathcal{J}}$ für alle $s \in \mathrm{Sym}(F)$,

<u>dann</u> $\mathcal{I} \models F$ gdw. $\mathcal{J} \models F$

$\square$

(Beweisende)