Seminaraufgaben Ser 4

16. Juni 2021
(Woche 10)

Sem 4.1

keine Variable sondern Konst.

$$F = \neg\left(A(f(x_2, x_2)) \wedge B(b)\right) \to \exists x_2\, P(x_1, c, x_2)$$

frei frei geb.

$FV(F) = \{x_1, x_2\}$ „freie Variablen"

$GV(F) = \{x_2\}$ „gebundene Variablen"

Relⁿ		Fkt		Konst
A	1 stellig	f	2 stellig	b
B	1 stellig			
P	3 stellig	b	0 stellig (Konstante)	

Nebendiskussion

$$\{\emptyset, \mathbb{1}, +^{(2)}, \cdot^{(2)}, <^{(2)}, P^{(1)}\}$$

$$\forall x.\ ((\emptyset = x \vee (\emptyset <^{(2)} x)) \wedge P(\mathbb{1}))$$

Sem 4.2

(a) $$\neg \exists x\, \exists y\ \mathrm{GrößerAls}^{(2)}(x,y)$$

alternativ: $\forall x\, \neg \exists y\ \mathrm{GrößerAls}^{(2)}(x,y)$

(b) $\Phi(x) \equiv$ x habe einen Teiler ....

$$\Phi(x) :\equiv \neg \exists y \left(\mathrm{Teilt}^{(2)}(y,x) \wedge \mathrm{GrößerAls}^{(2)}(\mathrm{MinusDrei}^{(1)}(x), y)\right)$$

Zusatz: Die entsprechende Menge ist

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_{[x \mapsto n]} \models \Phi(x) \},$$

wobei $(\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{I}})$ „die Standardinterpretation" für die Symbole

$$\{ \mathrm{Teilt}^{(2)}, \mathrm{GrößerAls}^{(2)}, \mathrm{MinusDrei}^{(1)} \}$$

bezeichnet.

Anm. $R^{(2)} \rightsquigarrow R$ 2-stellig

Prolog: $R/2$

Literatur: $\underbrace{\#}_{}(R) = 2$ (od. andere Fktsymbol statt $\#$)

dt. „Stelligkeit"
en. 'valence', 'arity', usw.

Sem 4.3

(a) $F = R(f(x,c),x)$. Dann $Sym(F) = \{R, f, c\}$.

Universum: $U = \mathbb{N}$

Wähle ① $R^I := \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad f^I : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\quad : (u,v) \longmapsto u$

$c^I := 1000$

$x^I := 1$

② $R^J := \emptyset$, $\quad f^J = f^I$, $c^J = c^I$, $x^J = x^I$

Z: $I \models R(f(x,c),x)$ und $J \not\models R(f(x,c),x)$

Es gilt:

- $(f(x,c)^I, x^I) = (f^I(x^I, c^I), x^I) = (f^I(1,1000), 1)$
  $= (1,1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} = R^I$,

  sodass $I \models R(f(x,c),x)$
- $(f(x,c)^J, x^J) = (f^J(x^J, c^J), x^J) = (f^J(1,1000),1)$
  $= (1,1) \notin \emptyset = R^J$,

  sodass $J \not\models R(f(x,c),x)$

(b) U = Menge aller Farben $= \{$Rot, Blau, ...$\}$

$R^K = \{$(Rot, Rot), (Blau, Blau), ...$\}$

f(Farbe$_1$, Farbe$_2$) = Farbe 50% gw. beiden

c^K = Lila

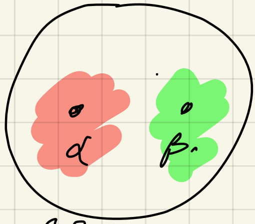
x^K = Lila.

Dann $(f(x,c)^K, x^K) = (f^K(x^K, c^K), x^K) = (f^K(\text{Lila}, \text{Lila}), \text{Lila})$
$= (\text{Lila}, \text{Lila}) \in R^K$

$\Longrightarrow K \models R(f(x,c),x)$.

Sem 4.4

(a) keine Tautologie



Betrachte die Formeln $F = R(x)$
$G = S(x)$

Betracht Universum + Interp.:
$\mathcal{U} = \{\alpha, \beta\}$, $R^{\mathcal{I}} = \{\alpha\}$, $S^{\mathcal{I}} = \{\beta\}$.

Dann für alle $u \in \mathcal{U}$ gilt $x^{\mathcal{I}[x \mapsto u]} = u \in R^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}[x \mapsto u]}$
od. $\in S^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}[x \mapsto u]}$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models R(x)$ od. $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models S(x)$

$\Rightarrow$ für alle $u \in \mathcal{U}$: $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \models \underbrace{R(x) \vee S(x)}_{F \vee G}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{I} \models \forall x \, (F \vee G)$ ✱

Sei $u = \alpha$. Dann $x^{\mathcal{I}[x \mapsto u]} = u \notin S^{\mathcal{I}} = S^{\mathcal{I}[x \mapsto u]}$
Also $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ ein $u \in \mathcal{U}$ existiert mit $\mathcal{I}_{[x \mapsto u]} \not\models S(x)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{I} \not\models \underbrace{\forall x \; S(x)}_{\forall x \; G}$ ✱✱

Analog lässt sich argumentieren: $\mathcal{I} \not\models \forall x \; F$ ✱✱✱

Aus ✱✱ + ✱✱✱ erhält man
$\mathcal{I} \not\models \forall x \, F \vee \forall x \, G$ ✱✱✱✱

Aus ✱ + ✱✱✱✱ folgt also $\mathcal{I} \not\models \forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x \, F \vee \forall x \, G)$.

Insbesondere ist $\forall x (F \vee G) \leftrightarrow (\forall x \, F \vee \forall x \, G)$ keine Taut.

(b) Ist eine Tautologie.

$$\forall x\ (F \to G)$$
$$\equiv \forall x\ (\neg F \lor G).$$
$$\equiv (\forall x\ \neg F) \lor G. \qquad \text{weil } x \notin FV(G)$$
$$\equiv (\neg \exists x\ F) \lor G$$
$$\equiv \exists x\ F \to G.$$

Also ist $\forall x (F \to G) \leftrightarrow (\exists x\ F \to G)$ eine Taut.

(c) ~~Keine~~ Keine Tautologie

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$

$U = \mathbb{N}$, $\quad P^I = \{ (m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \}$

$U = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ $\quad P^I = \{ (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha) \}$

In all diesen Interp. kann man zeigen:

$I \models \forall x\ \exists y\ P(x,y)$ aber $I \not\models \exists y\ \forall x\ P(x,y)$

Darum $I \not\models \forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y).$

Also ist $\forall x\ \exists y\ P(x,y) \to \exists y\ \forall x\ P(x,y)$ keine Taut.

Sem 4.5

Sei $\mathcal{U}$ fixes Universum. Im Folgenden sind alle Interp über $\mathcal{U}$.

$\Psi(X, I, J) :=$ I, J Interp. mit $s^I = s^J$ für alle $s \in Sym(X)$.
↑ Fml od. Term (über $\mathcal{U}$)

$\Phi(F) :=$ Für alle Interp I, J: falls $\Psi(F, I, J)$, dann $I \models F$ gdw. $J \models F$.
Fml

$\Phi(t) :=$ Für alle Interp I, J: falls $\Psi(t, I, J)$, dann $t^I = t^J$.
Term

(wird häufig im Folgenden verwendet)

Beobachtung: Sei X eine Fml od. Term und I, J Interp.
Sei Y eine Fml oder Term, die/der ein Teilausdruck von X ist.
Dann $Sym(Y) \subseteq Sym(X)$. Also, falls $\Psi(X, I, J)$, dann $\Psi(Y, I, J)$ auch. ∎

Behauptung. Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $\Phi(F)$. } Dies entspricht der Aufgabe. (Warum?)

Beweis. Wir zeigen per str. Ind., dass $\mathcal{E} := \{F \in \mathcal{F} \mid \Phi(F)\} = \mathcal{F}$.
Sei $F \in \mathcal{F}$ beliebig.

(1) F ein Atom (d.h. relationaler Ausdruck).
[⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

(In (2)–(6) wird vorausgesetzt, dass alle Teilformeln von F in $\mathcal{E}$ liegen.)

(2) $F = \neg G$, $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.
Z: $\Phi(F)$ gilt

Seien I, J Interpretationen mit $\Psi(F, I, J)$.
Da G Teilfml von F, gilt $\Psi(G, I, J)$ (siehe oben).
Per Ind haben wir $\Phi(G)$. Da auch $\Psi(G, I, J)$, gilt
(*) $I \models G \iff J \models G$.

Dann $I \models F \iff I \models \neg G \iff I \not\models G$

Def^{n} von $\models$ für $\neg$

(*) $\Updownarrow$

$J \not\models G \iff J \models \neg G \iff J \models F$.

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

→

(3) $F = G_1 \wedge G_2$, also $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G_1)$, $\Phi(G_2)$ gelten.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

Da G_1, G_2 Teilfml von F, gelten auch

$\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$ (siehe oben).

Per Ind. haben wir $\Phi(G_1)$ und $\Phi(G_2)$. Demzufolge da auch $\Psi(G_1, I, J)$ und $\Psi(G_2, I, J)$, gelten

(*) $I \models G_1 \Leftrightarrow J \models G_1$ und $I \models G_2 \Leftrightarrow J \models G_2$.

Dann

$$
\begin{aligned}
& I \models F \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}} \text{ von } \models \text{ für } \wedge}{\Longleftrightarrow}\; & I \models G_1 \wedge G_2 \\
\Longleftrightarrow\; & I \models G_1 \text{ und } I \models G_2 \\
& \;\Updownarrow (*) \qquad\qquad \Updownarrow (*) \\
\Longleftrightarrow\; & J \models G_1 \text{ und } J \models G_2 \\
\overset{\text{Def}^{\text{n}} \text{ von } \models \text{ für } \wedge}{\Longleftrightarrow}\; & J \models G_1 \wedge G_2 \\
\Longleftrightarrow\; & J \models F
\end{aligned}
$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(4) $F = G_1 \vee G_2$ [$\rightsquigarrow$ **übung!**] ... also $F \in \mathcal{E}$.

$\longrightarrow$

(5) $F = \exists x\, G$, also $G \in \mathcal{E}$, d.h. $\Phi(G)$ gilt.

Z: $\Phi(F)$ gilt.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(F, I, J)$.

(*) Da G Teilfml von F, gilt $\Psi(G, I, J)$ (siehe oben).

Für jedes $u \in \mathcal{U}$ beobachte man, dass

für alle $s \in Sym(G)$

weil s ein Symbol ist und $s \neq x$

$$s = x \implies s^{I_{[x \mapsto u]}} = u = s^{J_{[x \mapsto u]}}$$

$$s \neq x \implies s^{I_{[x \mapsto u]}} = s^{I} \overset{(*)}{=} s^{J} = s^{J_{[x \mapsto u]}}$$

Darum $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$ für jedes $u \in \mathcal{U}$.

Per Ind. haben wir $\Phi(G)$. Demzufolge, da auch $\Psi(G, I_{[x \mapsto u]}, J_{[x \mapsto u]})$, gilt

(**) $I_{[x \mapsto u]} \models G \iff J_{[x \mapsto u]}\, G$

für jedes $u \in \mathcal{U}$

Dann

$$I \models F$$

Def$^{\underline{\text{n}}}$ von $\models$ für $\exists$

$$\iff I \models \exists x\, G$$

$$\iff \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } I_{[x \mapsto u]} \models G$$

$$\Updownarrow (**)$$

Def$^{\underline{\text{n}}}$ von $\models$ für $\exists$

$$\iff \text{ein } u \in \mathcal{U} \text{ existiert mit } J_{[x \mapsto u]} \models G$$

$$\iff J \models \exists x\, G$$

$$\iff J \models F$$

Also gilt $\Phi(F)$. D.h. $F \in \mathcal{E}$.

(6) $F = \forall x\, G$ [⇝ Übung!] ... also $F \in \mathcal{E}$.

⟶

Per strukturelle Induktion haben wir durch (1)-(6) gezeigt, dass $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Das heißt, für alle Formeln $F \in \mathcal{F}$ und alle Interpretationen $(U, \cdot^{I})$, $(U, \cdot^{J})$,

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{falls}} \quad s^{I} = s^{J} \text{ für alle } s \in Sym(F), \\ \underline{\text{dann}} \quad I \models F \text{ gdw. } J \models F. \end{array}\right\} \Phi(F)$$

$\square$

(Beweisende)

Hinweise zu HA 4.5(a)

Beh. Für alle Terme $t \in \mathcal{T}$ gilt $\Phi(t)$. } Dies entspricht der Aussage in 4.5(a). (Warum?)

Bew. Sei $\mathcal{E} := \{ t \in \mathcal{T} \mid \Phi(t) \}$. Wir zeigen per str. Ind, dass $\mathcal{E} = \mathcal{T}$.

Sei $t \in \mathcal{T}$.

(1) t eine Variable od. Konstante.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(t, I, J)$.
D.h.
$$s^I = s^J \quad \text{für alle } s \in Sym(t).$$

Anhand dieser Infos zeige jetzt, dass $t^I = t^J$

Hinweis: wie sieht $Sym(t)$ aus?

Darum gilt $\Phi(t)$. Also $t \in \mathcal{E}$.

(für den nichtatomaren Fall wird angenommen, alle Teilausdrücke liegen in $\mathcal{E}$)

(2) $t = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, wobei $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, f n-stellige Fktsymbol, $n \in \mathbb{N}_+$.

Per Annahme: $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{E}$.

Seien I, J Interp. mit $\Psi(t, I, J)$.
D.h.
$$s^I = s^J \quad \text{für alle } s \in Sym(t).$$

Da jedes t_i Teilausdruck von t, gilt $\Psi(t_i, I, J)$.

(*) Per Ind gilt also $\boxed{?}$ für alle i.

(**) Da $f \in Sym(t)$, gilt auch $\boxed{?}$.

Aus (*) + (**) folgt
$$t^I = (f(t_1, \dots, t_n))^I = \boxed{? = ? = ?} = t^J.$$

Darum gilt $\Phi(t)$. Also $t \in \mathcal{E}$.

Aus (1)+(2) folgt per str. Ind $\mathcal{E} = \mathcal{T}$ $\square$