Seminaraufgaben Ser 3

2. Juni 2021
(Woche 8)

Sem 3.1

a) $F_0 = \neg(((A_0 \to A_1) \to A_0) \to A_0)$.

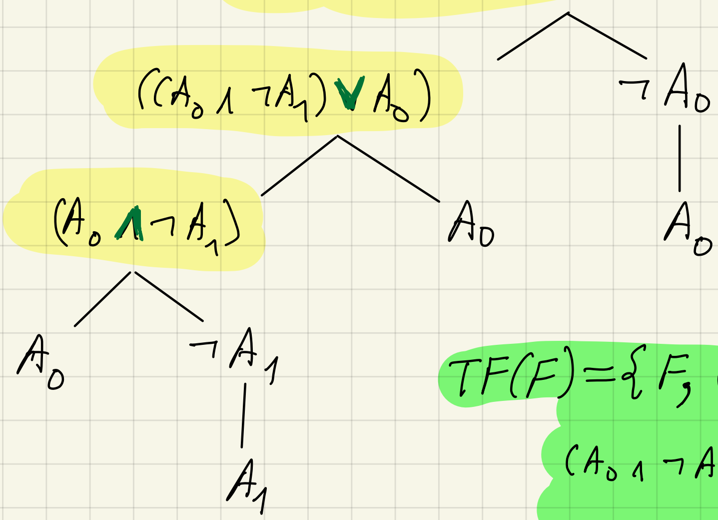
$$F_0 \equiv ((A_0 \to A_1) \to A_0) \land \neg A_0 .$$

$$\equiv (\neg(A_0 \to A_1) \lor A_0) \land \neg A_0 .$$

$$\left.\begin{array}{l} \equiv ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0) \land \neg A_0 . \\ =: F \end{array}\right\} \leftarrow \text{NNF}$$

b)

$F = ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0) \land \neg A_0$

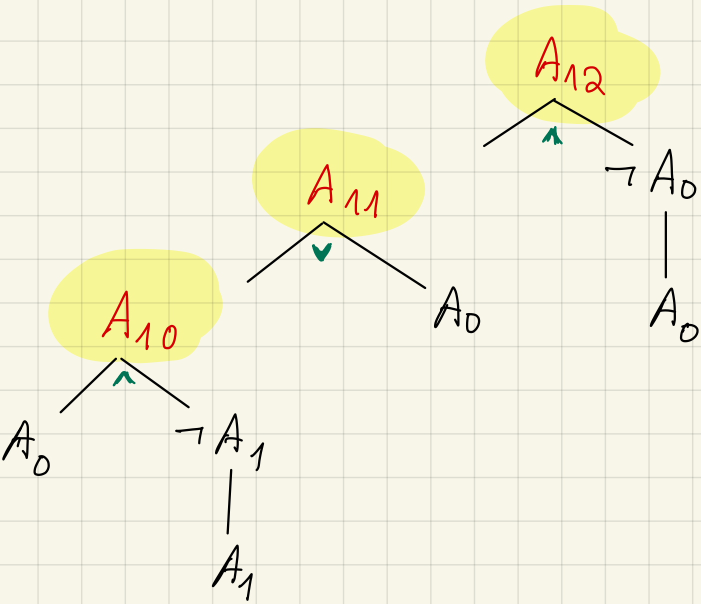


$TF(F) = \{ F, ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0), (A_0 \land \neg A_1), \neg A_1, \neg A_0, A_1, A_0 \}$

$$TF(F) = \{ F, ((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0), (A_0 \land \neg A_1), \neg A_1, \neg A_0, A_1, A_0 \}$$

c) + d)

Teilfml F'	$v(F')$	$t_v(F')$
A_0	A_0	—
A_1	A_1	—
$\neg A_0$	$\neg A_0$	—
$\neg A_1$	$\neg A_1$	—
$(A_0 \land \neg A_1)$	A_{10}	$A_{10} \leftrightarrow (A_0 \land \neg A_1)$
$((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0)$	A_{11}	$A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \lor A_0)$
F	A_{12}	$A_{12} \leftrightarrow (A_{11} \land \neg A_0)$
	c)	d)



e)

Teilfml F'	$v(F')$	$t_v(F')$
A_0	A_0	—
A_1	A_1	—
$\neg A_0$	$\neg A_0$	—
$\neg A_1$	$\neg A_1$	—
$(A_0 \land \neg A_1)$	A_{10}	$A_{10} \leftrightarrow (A_0 \land \neg A_1)$
$((A_0 \land \neg A_1) \lor A_0)$	A_{11}	$A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \lor A_0)$
F	A_{12}	$A_{12} \leftrightarrow (A_{11} \land \neg A_0)$

$$tsei_v(F) = v(F) \land \bigwedge_{F' \in TF(F) \setminus \mathcal{A}} t_v(F')$$

$$= A_{12} \land (A_{10} \leftrightarrow (A_0 \land \neg A_1))$$
$$\land (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \lor A_0))$$
$$\land (A_{12} \leftrightarrow (A_{11} \land \neg A_0))$$

f) $tsei_v(F) \equiv A_{12}$

$$\land (\neg A_{10} \lor A_0) \land (\neg A_{10} \lor \neg A_1) \land (A_{10} \lor \neg A_0 \lor A_1)$$
$$\land (\neg A_{11} \lor A_{10} \lor A_0) \land (A_{11} \lor \neg A_{10}) \land (A_{11} \lor \neg A_0)$$
$$\land (\neg A_{12} \lor A_{11}) \land (\neg A_{12} \lor \neg A_0) \land (A_{12} \lor \neg A_{11} \lor A_0)$$

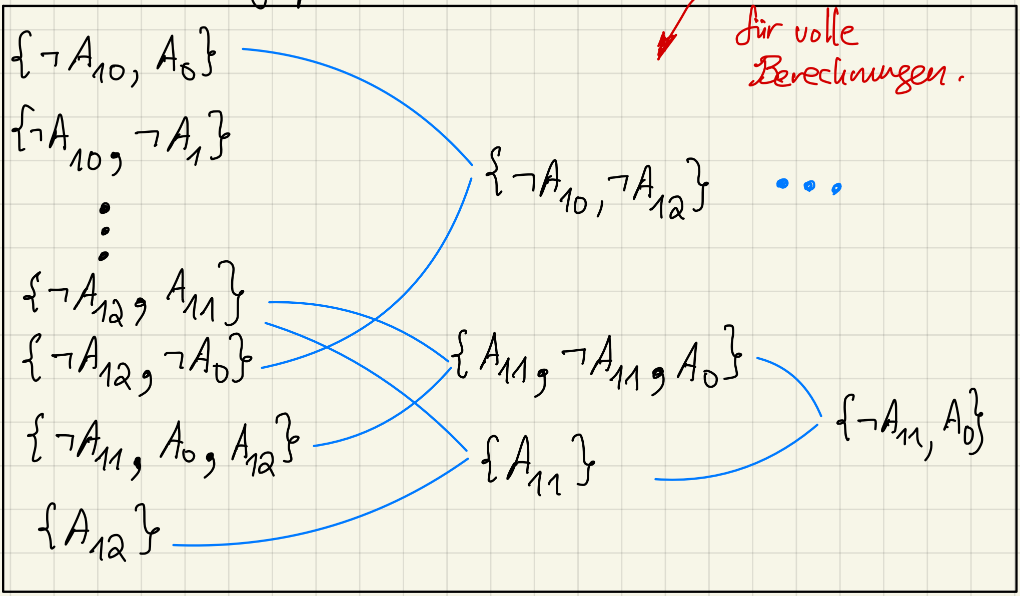
Sem 3.2

Disjunktionsglieder

a) $G \equiv \{\{\neg A_{10}, A_0\}, \{\neg A_{10}, \neg A_1\}, \ldots, \{A_{12}\}\}$ $\wedge$

(bitte wenden für volle Berechnungen.

b) Resolventengraph (IDEE)



*wir müssen nicht alle Resolvente bilden, wenn wir lediglich zeigen wollen, <u>dass</u> $\emptyset \in Res^*(G)$

c) Aus Graphen folgt $\emptyset \in Res^*(G)$.

$\xRightarrow{\text{Korrektheit}}$ G unerfüllbar $\Rightarrow \exists$ Deduktion

(bitte wenden für Deduktion)

d) G unerf. $\Rightarrow \neg G$ tautolgisch

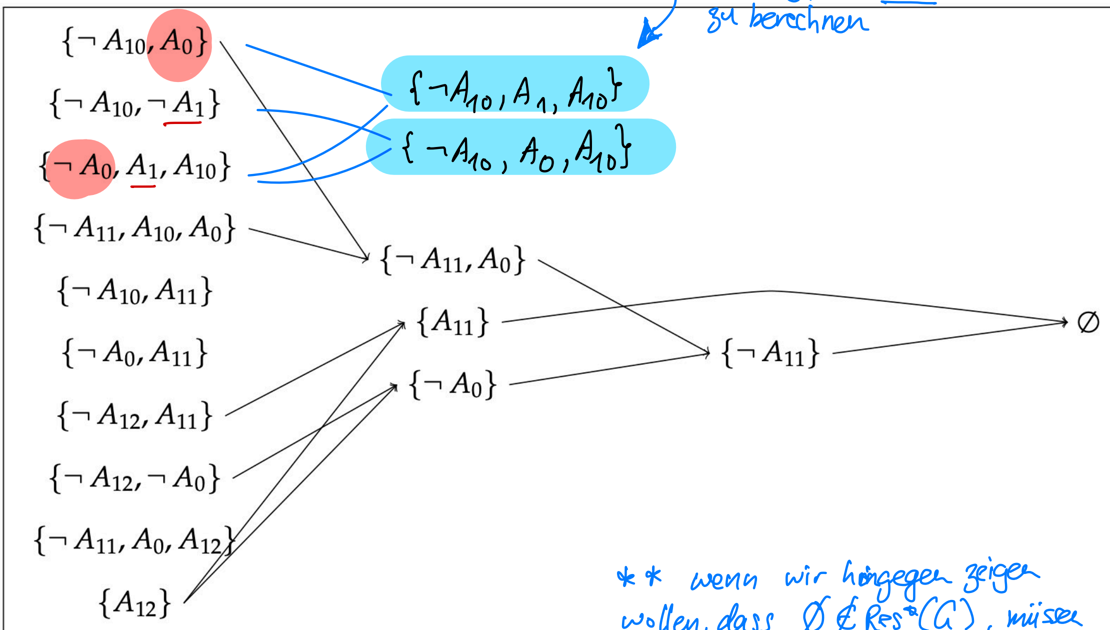
$\Rightarrow \neg G$ insbesondere erfüllbar //

KLAUSELFORM:

$$\begin{aligned} G \;=\; \{ & \{\neg A_{10}, A_0\}, \{\neg A_{10}, \neg A_1\}, \{\neg A_0, A_1, A_{10}\}, \\ & \{\neg A_{11}, A_{10}, A_0\}, \{\neg A_{10}, A_{11}\}, \{\neg A_0, A_{11}\}, \\ & \{\neg A_{12}, A_{11}\}, \{\neg A_{12}, \neg A_0\}, \{\neg A_{11}, A_0, A_{12}\}, \\ & \{A_{12}\} \}_\wedge. \end{aligned}$$

RESOLVENTENGRAPH:

* da wir ∅ ableiten, brauchen wir nicht alle Resolventen zu berechnen



** wenn wir hingegen zeigen wollen, dass $\emptyset \notin \mathrm{Res}^*(G)$, müssen wir alle Resolventen berechnen.

DEDUKTION:

1.	$\{A_{12}\}$	Klausel aus G.
2.	$\{\neg A_{12}, \neg A_0\}$	Klausel aus G.
3.	$\{\neg A_{10}, A_0\}$	Klausel aus G.
4.	$\{\neg A_{11}, A_{10}, A_0\}$	Klausel aus G.
5.	$\{\neg A_{12}, A_{11}\}$	Klausel aus G.
6.	$\{\neg A_{11}, A_0\}$	Res. aus 4 + 3 unter A_{10}.
7.	$\{A_{11}\}$	Res. aus 1 + 5 unter A_{12}.
8.	$\{\neg A_0\}$	Res. aus 1 + 2 unter A_{12}.
9.	$\{\neg A_{11}\}$	Res. aus 6 + 8 unter A_0.
10.	$\emptyset$	Res. aus 7 + 9 unter A_{11}.

URTEIL: Da $\emptyset \in \mathrm{Res}^*(G)$, ist G unerfüllbar.

Sem 3.3

a) **Wahr:** PTIME (TT) vs. EXPTIME (WWT).

Sei F eine Formel. Sei $m = |TF(F)|$, $n = |Atome(F)|$.
Wir wissen
$$n \leq m \leq \text{Länge}(F)$$ und im 'worstcase' sind diese bis auf konstantes Vielfach ähnliche Größen.

Tseitin:

NNF Umwandlung	:	kostet Konst $\cdot m$ Zeit
TF(F) berechnen	:	" " " "
ν bauen	:	" " " "
t_ν bauen	:	" " " "
tsei$_\nu$ bauen	:	" " " "
KNF daraus bauen	:	" " " "

insgesamt: TT läuft in $O(m)$ Zeit.

WWT:

$\overbrace{\text{Atome}(F)}$		$\overbrace{TF(F)\setminus \text{Atome}(F)}$			F
00 0					1
00 1					0
⋮					0
					1
					⋮
					0
11 1					1

2^n Schritte

Konst $\cdot m$ Berechnungen

D-Glieder bilden

je Glied kostet Konst $\cdot n$ Schritte.

WWT läuft in $O(2^n(m+n))$ Zeit

$\overset{\text{da } n \leq m}{\rightsquigarrow}$ $O(2^n m)$ Zeit

$\overset{\text{worst case } \frac{n}{m} \to 1}{\rightsquigarrow}$ $\Omega(2^m m)$ ... also $O(2^m)$ Zeit ($2^m m \sim 2^m$ asymptotisch)

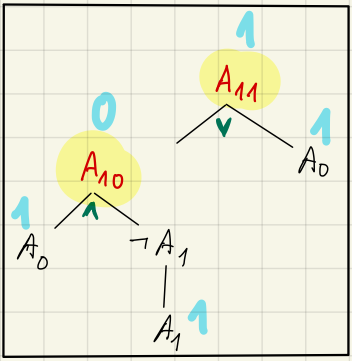
b) **Wahr**: Hier ein Bsp. für $F=(A_0 \wedge \neg A_1) \vee A_0$.

Modell $tsei_\vee(F) \rightsquigarrow$ Modell F:

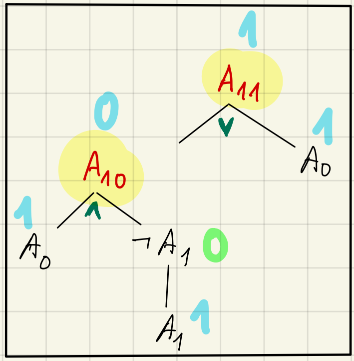
Sei I Modell für $tsei_v(F)$

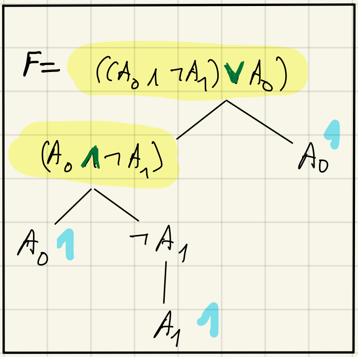
$tsei_v(F) = A_{11} \wedge (A_{11} \leftrightarrow (A_{10} \vee A_0)) \wedge (A_{10} \leftrightarrow (A_0 \vee \neg A_1))$

Beispiel mit $I=\{A_0, A_1, A_{11}\}$



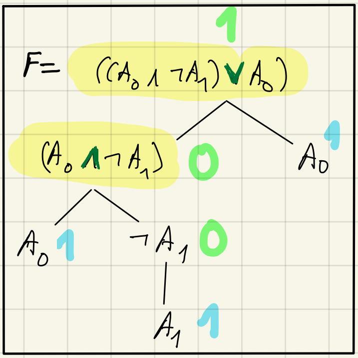
berechne eval von allen Literalen





- wende I auf alle Teilfml von F an.

wende Algorithmus für eval(·,·) an.



- zeige per str. Induktion, dass $eval(F', I) = eval(v(F'), I)$ für alle Teilfml F' von F.
- Insbesondere gilt $eval(F, I) = eval(v(F), I) = 1$

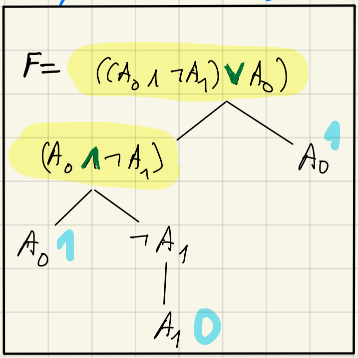
Also $I \models F$

3.3 b) fortgesetzt...)

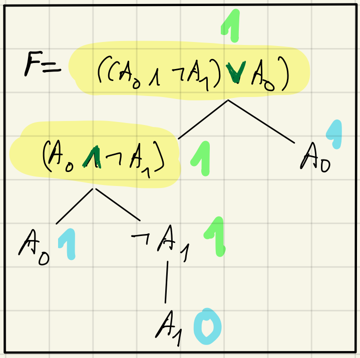
Modell F $\rightsquigarrow$ Modell $tsei_v(F)$

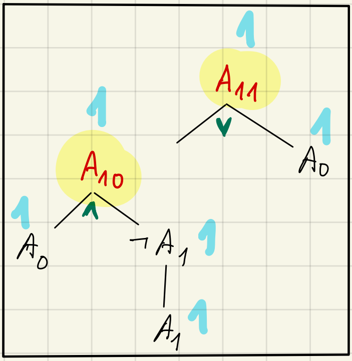
Sei I Modell für F, d.h. $eval(F, I) = 1$.

Beispiel mit $I = \{A_0\}$



berechne eval von allen Teilformeln von F:





- Setze $\tilde{I} :=$ Interp mit $v(F') \in \tilde{I} :\Longleftrightarrow eval(F', I)$ für alle $F' \in TF(F)$ $\Big\}$ $*$
- Insbesondere $v(F) \in \tilde{I}$, weil $eval(F, I) = 1$ per Wahl. $\Big\}$ $**$

Sei $F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}$. Dann

Fall 1 $F' = F_1' \wedge F_2'$ wobei $F_1', F_2' \in TF(F)$.

Dann $eval(v(F'), \tilde{I}) \overset{*}{=} eval(F', I)$

$= eval(F_1' \wedge F_2', I)$

$\overset{*}{=} eval(v(F_1') \wedge v(F_2'), \tilde{I})$

sodass $eval(v(F') \leftrightarrow (v(F_1') \wedge v(F_2')), \tilde{I}) = 1$

d.h. $eval(t_v(F'), \tilde{I}) = 1$

Fall 2 $F' = F_1' \vee F_2'$ wobei $F_1', F_2' \in TF(F)$.

(analog)

$***$ also $\tilde{I} \models t_v(F')$ für alle $F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}$

Aus $**$ + $***$ folgt $\tilde{I} \models v(F) \wedge \bigwedge_{F' \in TF(F) \setminus \mathcal{L}} t_v(F')$, d.h. $\tilde{I} \models tsei_v(F)$.

c) **Falsch:**

$F = \{\{\neg A_3, A_5\}, \{A_5\}, \{\neg A_3\}\}_\wedge$.

$Res^*(F) = \{\{\neg A_3, A_5\}, \{A_5\}, \{\neg A_3\}\}$.

Also $\emptyset \notin Res^*(F)$.

Darum F nich erfüllbar und hat **keine** Deduktion.

d) **Wahr:** Laut VL gilt

$Res^n(F) \equiv F$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

insbes. auch für $n = 17$.